МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять
з курсу

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ І МЕТОДИ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

(для студентів 4 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом
6.050701 – Електротехніка та електротехнології
та слухачів другої вищої освіти за спеціальністю
7.05070103 – Електротехнічні системи електроспоживання (за видами))

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2015

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математичні методи і моделі в електроенергетиці» (для студентів 4 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом 6.050701 – Електротехніка та електротехнології та слухачів другої вищої освіти за спеціальністю 7.05070103 – Електротехнічні системи електроспоживання (за видами)) / Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: І. Т. Карпалюк., А. О. Карюк – Харків: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. –57 с.

Укладачі: к.т.н. І. Т. Карпалюк
А. О. Карюк

Рецензент: І. Г. Абраменко, к.т.н., доцент Харківського національного університету міського господарства імені О. М. Бекетова

*Затверджено кафедрою “Електропостачання міст”,
протокол № 2 від 17.10.2014 р.*

ЗМІСТ

ВСТУП **5**
ЗАНЯТТЯ №1. КОМБІНАТОРИКА **6**
1.1 Задачі по заняттю №1: 6
Задача 1 6
Задача 2 7
Задача 3 8
Задача 4 9
Задача 5 10
Задача 6 11
Задача 7 12
ЗАНЯТТЯ №2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ **13**
2.1 Задачі по заняттю №2 14
Задача 1 14
Задача 2 14
Задача 3 15
Задача 4 16
Задача 5 17
Задача 6 18
Задача 7 20
ЗАНЯТТЯ №3. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА **21**
3.1 Задачі по заняттю №3 21
Задача 1 21
Задача 2 23
Задача 3 24
Задача 4 26
Задача 5 27
ЗАНЯТТЯ №4. ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ В ПРОГРАМІ EXCEL **30**
4.1 Задачі по заняттю №4 30
Задача 1 30
Задача 2 34
ЗАНЯТТЯ №5. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ **37**
5.1 Алгебраїчне інтерполювання. Поліном Лагранжа. Постановка завдання інтерполювання. Системи функцій Чебишева 37
5.2 Кінцеві різниці і різницеві відносини. Інтерполяційний поліном Ньютона 37
Задача 1 39
Задача 2 40
Задача 3 41
ЗАНЯТТЯ №6. ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗ ФУНКЦІЙ **43**
6.1 Автоматичне заповнення ряду на основі арифметичної прогресії 43
6.2 Автоматичне заповнення ряду на основі геометричної прогресії 43
6.3 Заповнення ряду вручну на основі лінійного і експоненціального тренда 43

6.4 Обчислення трендів за допомогою додавання лінії тренду на діаграму43
6.5 Прогнозування значень за допомогою функцій 44
6.6 Виконання регресійного аналізу за допомогою надбудови "Пакет аналізу" 44
6.7 Прогнозування. Метод експоненціального згладжування 46
Питання для контролю... 50
ЗАНЯТТЯ №7. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ СЕЗОННОЇ КОМПОНЕНТИ... 51
7.1 Метод прогнозу з використанням змінного середнього....................... 51
7.2 Дані для розрахунку прогнозу 55
СПИСОК ДЖЕРЕЛ.. 56

ВСТУП

Згідно навчального плану передбачається наступна кількість аудиторних занять

Найменування показників ↓↓↓	**Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень**	**Характеристика навчальної дисципліни**	
		денна форма навчання	**заочна форма навчання**
Кількість кредитів 3	Вибіркова	Рік (роки) підготовки	
		4–й	–
		Семестр(и)	
		7–й	–
Загальна кількість годин – 108	Галузь знань: 0507 Електротехніка та електромеханіка	Лекції*:	
		30 год.	–
Модулів – 1		Практичні, семінарські*:	
		15 год	–
Змістових модулів (ЗМ) – 4	Напрям підготовки: 6.050701 «Електротехніка та електротехнології»	Лабораторні*:	
		–	–
Тижневих годин для денної форми навчання: аудиторних – 2,5 самостійної роботи студента – 4	Спеціальність: Електротехніка та електротехнології (***фахове спрямування*** (для ОКР «бакалавр») або ***спеціалізація*** (для ОКР «спеціаліст») або ***магістерські програми*** (для ОКР «магістр»)	Самостійна робота*:	
		63 год.	–
		Індивідуальні завдання:	
		–	–
		Вид контролю:	
	Освітньо-кваліфікаційний рівень: бакалавр	залік	–

ЗАНЯТТЯ №1. КОМБІНАТОРИКА

Короткі теоретичні відомості та розрахункові формули.

Розміщення без повторень. Число розміщень **n** різних елементів по **k** різних позиціям

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

або, в термінах факторіалів,

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Комбінації без повторень. При $k<n$, вибрати **k** предметів з **n** можна A_n^k способами, переставляючи їх P_k способами:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Рекурентна формула: $C_m^n = C_m^{n-1}\dfrac{m-n+1}{n}$.

Властивості сполучень: $C_m^n = C_m^{m-n}$; $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$.

Перестановки з повтореннями. Число перестановок з повтореннями є

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Розміщення з повтореннями. Нехай дані **n** різних видів предметів, які можна розмістити по **k** різним місцям, причому вибирати предмети можна з повтореннями. Такі вибірки називаються розміщеннями з повтореннями, а їх кількість розраховується за формулою: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Поєднання з повтореннями. Число поєднань з повтореннями може бути розраховано за формулами:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}.$$

1.1 Задачі по заняттю №1:

Задача 1

Підприємство може надати роботу за однією спеціальністю 4 жінкам (A), а по іншій – 6 чоловікам (B), по третій – 3 робітникам незалежно від статі (C). Скількома способами можна заповнити вакантні місця, якщо є 14 претендентів: 6 жінок (D) і 8 чоловіків (E)?

Рішення.

Маємо 14 претендентів і 13 робочих місць. Спочатку оберемо робітників на першу спеціальність, тобто є 4 жінки із 6:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$$

Далі незалежно аналогічним чином оберемо чоловіка на другу спеціальність:

$$C_8^6 = \frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$$

Залишилось 2 жінки, 2 чоловіка і 3 вакантні місця, які, за умовою, може зайняти будь-яка із 4 залишившихся людин. Це може бути зроблено 2 варіантами:

1) 1 жінка и 2 чоловіки (обираємо жінку C_2^1 = 2 способами)

2) 1 чоловік і 2 жінки (обираємо чоловіка C_2^1 =2 способами).

У підсумку отримаємо

15 * 28(2 + 2) = 1680 способів.

<u>Відповідь</u>: 1680 способів

Таблиця 1 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	D	E	S
1	4	6	3	6	7	1680
2	3	5	3	6	7	8400
3	2	4	3	6	7	441000
4	1	5	3	6	7	105840
5	5	3	4	5	9	2520
6	4	4	4	5	9	18900
7	3	5	4	5	9	37800
8	2	6	4	5	9	25200
9	1	7	4	5	9	5400
10	5	3	5	6	8	2016
11	4	4	5	6	8	6300
12	3	5	5	6	8	6720
13	2	6	5	6	8	2520
14	1	7	5	6	8	288
15	5	3	6	7	8	8232

№	A	B	C	D	E	S
16	4	4	6	7	8	17150
17	3	5	6	7	8	13720
18	2	6	6	7	8	4116
19	1	7	6	7	8	392
20	5	3	7	7	9	14112
21	4	4	7	7	9	35280
22	3	5	7	7	9	35280
23	2	6	7	7	9	14112
24	1	7	7	7	9	2016
25	5	3	8	6	10	720
26	4	4	8	6	10	3150
27	3	5	8	6	10	5040
28	2	6	8	6	10	3150
29	1	7	8	6	10	720
30	5	3	3	6	7	4200

Задача 2

У пасажирському поїзді 9 вагонів. Скількома способами можна розмістити у поїзді 4 чоловік, за умовою, що всі вони повинні їхати у різних вагонах?

<u>Рішення</u>. Так як усі пасажири повинні їхати в різних вагонах, необхідно відібрати 4 вагони (A) із 9 (B) з урахуванням порядку (вагоні відрізняються №), ці вибірки–розміщення із **n** різних елементів по **m** елементів, де **n**=9, **m** =4.

Число таких розміщень знаходимо за формулою:

$$A_n^m = n*(n-1)*(n-2)*...*(n-m+1)$$

Отримаємо: A_9^4 =9*8*7*6=3024

<u>Відповідь</u>: 3024 способами можна розмістити у поїзді 4 людини.

Таблиця 2 – Дані для варіантів рішень.

№	A	B	S
1	4	9	1680
2	4	8	1680
3	4	7	840
4	4	6	360
5	4	5	120
6	5	9	15120
7	5	8	6720
8	5	7	2520
9	5	6	720
10	5	5	120

№	A	B	S
11	6	9	60480
12	6	8	20160
13	6	7	5040
14	6	6	720
15	7	9	181440
16	7	8	40320
17	7	7	5040
18	3	9	504
19	3	8	336
20	3	7	210

№	A	B	S
21	3	6	120
22	3	5	60
23	3	4	24
24	3	3	6
25	2	9	72
26	2	8	56
27	2	7	42
28	2	6	30
29	2	5	20
30	2	4	12

Задача 3

В групі 9 чоловік(А). Скільки можна утворити різних підгруп при умові, що в підгрупу входить не менше 2 чоловік (В)?

Рішення: Не менше 2–х чоловік, тобто 2+7 чи 3+6 чи 4+5 чоловік (5+4, 6+3, 7+2 –ті ж самі комбінації).

В кожній вибірці важливий лише склад, так як члени підгрупи не розрізняються за ролями, тобто вибірки–поєднання з **n** різних елементів по **m** елементів, їх число:

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

де n!=1*2*3*4*…*n

Число вибірок з 2–х чоловік:

$$C_9^2 = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{8*9}{1*2} = 36$$

Число вибірок з 3–х чоловік:

$$C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{7*8*9}{1*2*3} = 84$$

Число вибірок з 4–х чоловік:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{6*7*8*9}{1*2*3*4} = 126$$

Застосовуємо правило складання: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 = 36 + 84 + 126 = 246$

Відповідь: 246 способів.

Таблиця 3 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	S	№	A	B	S	№	A	B	S
1	9	2	246	11	8	3	56	21	12	3	1507
2	9	3	210	12	8	4	70	22	12	4	1287
3	9	4	126	13	8	5	56	23	12	5	792
4	9	5	126	14	8	6	28	24	12	6	924
5	10	2	375	15	11	2	3322	25	7	2	56
6	10	3	330	16	11	3	957	26	7	3	35
7	10	4	210	17	11	4	792	27	6	2	15
8	10	5	252	18	11	5	462	28	6	3	20
9	10	6	210	19	11	6	462	29	5	2	10
10	8	2	84	20	12	2	6325	30	5	1	15

Задача 4

Групу з 20 студентів (A) необхідно поділити на 3 бригади (B), причому в першу бригади повинні входити 3 чоловіки (C), в другу – 5(D) і третю – 12 (E). Скількома способами це можна зробити?

Рішення: Створюючи першу бригади вибирають 3 чоловіки з 20, створюючи другу – 5 із залишившихся 14, створюючи третю – 12 із залишившихся 12.

Для вибірок важливий тільки склад(ролі членів бригади не розрізняються).

Ці вибірки – поєднання з n різних елементів по m елементів, їх кількість:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Створюючи складну вибірку (з 3-х бригад), скористаємося правилом множення:

$$N = C_{20}^{3} * C_{17}^{5} * C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!(20-3)!} * \frac{17!}{5!(17-5)!} * \frac{12!}{12!(12-12)!} =$$

$$= \frac{20!}{3!*17!} * \frac{17!}{5!*12!} * \frac{12!}{12!*0!} = \frac{13*14*15*16*17*18*19*20}{1*2*3*1*2*3*4*5} = 7054320$$

Відповідь: 7054320 способів.

Таблиця 4 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	D	E	S
1	20	3	3	5	12	7054320
2	20	3	3	6	11	14108640
3	20	3	3	7	10	22170720
4	20	3	3	8	9	27713400
5	20	3	2	5	13	1627920
6	20	3	2	6	12	3527160
7	20	3	2	7	11	6046560
8	20	3	2	8	10	8314020
9	20	3	2	9	9	9237800
10	20	3	4	7	9	55426800
11	20	3	4	8	8	62355150
12	20	3	4	6	10	38798760
13	20	3	4	5	11	21162960
14	20	3	4	4	12	8817900
15	20	3	4	3	13	2713200

№	A	B	C	D	E	S
16	20	3	4	2	14	581400
17	20	3	5	7	8	99768240
18	20	3	5	8	7	99768240
19	20	3	5	9	6	77597520
20	20	3	5	10	5	46558512
21	20	3	5	11	4	21162960
22	20	3	5	12	3	7054320
23	20	3	5	13	2	1627920
24	20	3	5	6	9	77597520
25	20	3	5	5	10	46558512
26	20	3	5	4	11	21162960
27	20	3	5	3	12	7054320
28	20	3	5	2	13	1627920
29	20	3	6	9	5	77597520
30	20	3	7	9	4	55426800

Задача 5

Для участі в проекті керівник відбирає 5 співробітників (A) з 10 (B). Скількома способами він може сформувати команду, якщо 2 (C) певних співробітника повинні увійти в команду?

Рішення: оскільки відомо, що двоє співробітників увійдуть в команду, то залишається відібрати 3 з 8. Для вибірки важливий тільки склад (за умовою всі члени команди не розрізняються за ролями). Отже, вибірки – поєднання з **n** різних елементів по **m** елементів, їх кількість:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

де n!=1*2*3*4*…*n

при **n=8**, **m=3**.

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{6*7*8}{1*2*3} = 56$$

Відповідь: 56 способів сформувати команду.

Таблиця 5 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	S
1	5	10	2	56
2	6	10	2	70
3	7	10	2	56
4	8	10	2	28
5	9	10	2	8
6	4	11	3	8
7	5	11	3	28
8	6	11	3	56
9	7	11	3	70
10	8	11	3	56

№	A	B	C	S
11	9	11	3	28
12	5	12	4	8
13	6	12	4	28
14	7	12	4	56
15	8	12	4	70
16	9	12	4	56
17	10	12	4	28
18	11	12	4	8
19	6	13	5	8
20	7	13	5	28

№	A	B	C	S
21	8	13	5	56
22	9	13	5	70
23	10	13	5	56
24	11	13	5	28
25	7	14	6	8
26	8	14	6	28
27	9	14	6	56
28	10	14	6	70
29	11	14	6	56
30	12	14	6	28

Задача 6

У шаховому турнірі брали участь 15 шахістів (А), причому кожен з них зіграв лише одну партію з кожним з решти. Скільки всього партій було зіграно в цьому турнірі?

Рішення: Спосіб 1. В одній грі беруть участь 2 людини, отже, треба обчислити, скількома способами можна відібрати 2-х чоловік з 15, причому порядок в таких парах не важливий.

Скористаємося формулою для знаходження числа сполучень (вибірок, що відрізняються лише складом) з **n** різних елементів по **m** елементів

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

де n!=1*2*3*4*…*n
при **n=15**, **m=2**.

$$C_{15}^2 = \frac{15!}{2!(15-2)!} = \frac{15!}{2!13!} = \frac{14*15}{1*2} = 105$$

Відповідь: 105 партій

Таблиця 6 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	S
1	15	2	105
2	16	2	120
3	17	2	136
4	18	2	153
5	19	2	171
6	20	2	190
7	21	2	210
8	22	2	231
9	23	2	253
10	24	2	276
11	25	2	300

№	A	B	S
12	26	2	325
13	27	2	351
14	28	2	378
15	29	2	406
16	30	2	435
17	31	2	465
18	32	2	496
19	33	2	528
20	34	2	561
21	35	2	595
22	36	2	630

№	A	B	S
23	37	2	666
24	38	2	703
25	39	2	741
26	40	2	780
27	41	2	820
28	42	2	861
29	43	2	903
30	44	2	946

Задача 7

Яких чисел від 1 (A) до 1000000 (B) більше: тих, у запису яких трапляється одиниця, або тих, у яких вона не зустрічається?

Рішення: Підрахуємо кількість чисел від 1 до 999999 (число 1000000 містить одиницю, його відразу відкинемо), у запису яких немає одиниць. Кожну цифру можна вибрати 9 способами (будь=яка цифра крім 1), тому всі 6 цифр (за правилом твори) можна вибрати способами (якщо в числі до значущих цифр стоять нулі, ми їх просто відкидаємо).

При цьому один варіант (000000) потрібно прибрати, так як число 0 не розглядається. Отримуємо всього чисел. Так як все чисел 1000000, то видно, що чисел без одиниці серед чисел від 1 до 1000000 більше, ніж тих, у запису яких одиниця є.

Таблиця 7 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	S
1	1	1000000	531440
2	1	10	8
3	1	100	80
4	1	1000	728
5	1	10000	6560
6	1	100000	59048
7	10	10	0
8	10	100	72
9	10	1000	720
10	10	10000	6552
11	10	100000	59040
12	10	1000000	531432
13	100	100	0
14	100	1000	648
15	100	10000	6480

№	A	B	S
16	100	100000	58968
17	100	1000000	531360
18	100	10000000	4782888
19	1000	1000	0
20	1000	10000	5832
21	1000	100000	58320
22	1000	1000000	530712
23	1000	10000000	4782240
24	10000	10000	0
25	10000	100000	52488
26	10000	1000000	524880
27	10000	10000000	4776408
28	100000	100000	0
29	100000	1000000	472392
30	100000	10000000	4723920

ЗАНЯТТЯ №2. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Класичне визначення ймовірності випадкової події

$$P\{A\} = \frac{m}{n}$$

Для знаходження ймовірності події необхідно, розглянувши різні результати випробування, знайти сукупність єдино можливих, рівно можливих і несумісних випадків, підрахувати загальне їх число n, число випадків m, що сприяють цій події, і потім виконати розрахунок по формулі.

$$0 \leqslant m \leqslant n,\ 0 \leqslant P\{A\} \leqslant 1.$$

Властивості ймовірності

$$P\{A\} = \frac{m}{n} = 1$$

$$P\{A\} = \frac{0}{n} = 0$$

$$P\{A\} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$P\{\overline{A}\} = 1 - P\{A\}$$

Теореми додавання ймовірностей

$$P\{A + B + \ldots + N\} = P\{A\} + P\{B\} + \ldots + P\{N\}$$

$$P\{A + B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{AB\}$$

Формули множення ймовірностей

$$P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B\}$$

$$P\{A_1 A_2 \ldots A_n\} = P\{A_1\} \cdot P\{A_2\} \ldots P\{A_n\}$$

$$P\{AB\} = P\{A\} \cdot P\{B|A\},\quad P\{AB\} = P\{B\} \cdot P\{A|B\}$$

Формула повної ймовірності

$$P\{A\} = \sum_{i=1}^{n} P\{B_j\} \cdot P\{A|B_j\}$$

Формула Байэса

$$P\{B_j|A\} = \frac{P\{B_j\} \cdot P\{A|B_j\}}{P\{A\}}$$

$$P\{B_j|A\} = \frac{P\{B_j\} \cdot P\{A|B_j\}}{\sum_{i=1}^{n} P\{B_j\} \cdot P\{A|B_j\}}$$

2.1 Задачі по заняттю №2

Задача 1

Абонент забув останню цифру 10-ту (А) номери телефону з 10 цифр (В) тому набирає її навмання. Визначити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більш ніж в 3 місця (З).

Рішення: Ймовірність набрати вірну цифру з десяти дорівнює за умовою **1/10**. Розглянемо наступні випадки:

1) перший дзвінок виявився вірним, ймовірність дорівнює **1/10** (відразу набрана потрібна цифра).

2) перший дзвінок виявився невірним, а другий – вірним, ймовірність дорівнює **9/10*1/9=1/10** (перший раз набрана невірна цифра, а другий раз вірна з решти дев'яти цифр).

3) перший і другий дзвінки виявилися невірними, а третій – вірним, ймовірність дорівнює **9/10*8/9*1/8=1/10** (аналогічно пункту 2). Всього отримуємо **P=1/10+1/10+1/10=3/10=0,3** – ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше ніж на три місця.

Відповідь: 0,3

Таблиця 8 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	S
1	10	10	3	0,30
2	11	11	3	0,27
3	12	12	3	0,25
4	13	13	3	0,23
5	14	14	3	0,21
6	15	15	3	0,20
7	10	10	5	0,50
8	11	11	5	0,45
9	12	12	5	0,42
10	13	13	5	0,38
11	14	14	5	0,36
12	15	15	5	0,33
13	10	10	6	0,60
14	11	11	6	0,55
15	12	12	6	0,50

№	A	B	C	S
16	13	13	6	0,46
17	14	14	6	0,43
18	15	15	6	0,40
19	10	10	7	0,70
20	11	11	7	0,64
21	12	12	7	0,58
22	13	13	7	0,54
23	14	14	7	0,50
24	15	15	7	0,47
25	10	10	8	0,80
26	11	11	8	0,73
27	12	12	8	0,67
28	13	13	8	0,62
29	14	14	8	0,57
30	15	15	8	0,53

Задача 2

Абонент забув останні 2 цифри (А) телефонного номера з 10 цифр (В), але пам'ятає, що вони різні і утворюють двозначне число, менше 30 (З). З урахуванням цього він набирає навмання 2 цифри. Знайти ймовірність того, що це будуть потрібні цифри.

Рішення: Використовуємо класичне визначення ймовірності: **P=m/n**, де m – число випадків, що сприяють здійсненню події, а n – число всіх рівно можливих елементарних результатів. **m=1**, так як тільки одне число правильне.

Підрахуємо кількість всіх можливих двозначних чисел з різними цифрами, менша 30, які може набрати абонент:

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Сірим кольором позначені числа з однаковими цифрами. Виключаються з набору. Таких чисел n=27 штук.

Тоді шукана ймовірність **P=1/27**.

Відповідь: 1/27.

Таблиця 9 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	S
1	2	10	30	1/27
2	2	10	40	1/36
3	2	10	50	1/45
4	2	10	60	1/54
5	2	10	70	1/63
6	2	10	80	1/72
7	2	10	90	1/81
8	2	10	10	1/9
9	2	10	20	1/18
10	3	10	300	1/270
11	3	10	400	1/360
12	3	10	500	1/450
13	3	10	600	1/540
14	3	10	700	1/630
15	3	10	800	1/720

№	A	B	C	S
16	3	10	900	1/810
17	3	10	100	1/90
18	3	10	200	1/180
19	4	10	3000	1/2700
20	4	10	4000	1/3600
21	4	10	5000	1/4500
22	4	10	6000	1/5400
23	4	10	7000	1/6300
24	4	10	8000	1/7200
25	4	10	9000	1/8100
26	4	10	1000	1/900
27	4	10	2000	1/1800
28	5	10	30000	1/27000
29	5	10	40000	1/36000
30	5	10	50000	1/45000

Задача 3

На полиці у випадковому порядку розставлено 40 книг (А), серед яких знаходиться тритомник (В) Пушкіна. Знайти ймовірність того, що ці томи стоять у порядку зростання номери зліва направо, але не обов'язково поряд.

Рішення: Використовуємо класичне визначення ймовірності: **P=m/n**, де n – число всіх рівно можливих елементарних результатів, m – число елементарних результатів, що сприяють здійсненню події А = (Томи стоять у порядку зростання номери зліва направо, але не обов'язково поруч).

$n=40\cdot39\cdot38=59280$, так як перший том можна поставити на будь-яке з 40 місць, другий – на будь-яке з 39 місць і третій – на будь-яке з решти 38 місць. А число

$$m = C_{40}^{3} = \frac{40!}{37!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 39\cdot 38}{1\cdot 2\cdot 3} = 9880$$

Тоді шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{9880}{59280} = \frac{1}{6}$$

Відповідь: 1/6.

Таблиця 10 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	S
1	40	3	1/6
2	50	3	1/6
3	60	3	1/6
4	70	3	1/6
5	80	3	1/6
6	90	3	1/6
7	10	3	1/6
8	20	3	1/6
9	30	3	1/6
10	40	2	1/2
11	50	2	1/2
12	60	2	1/2
13	70	2	1/2
14	80	2	1/2
15	90	2	1/2
16	10	2	1/2
17	20	2	1/2
18	30	2	1/2
19	40	5	1/120
20	50	5	1/120
21	60	5	1/120
22	70	5	1/120
23	80	5	1/120
24	90	5	1/120
25	10	5	1/120
26	20	5	1/120
27	30	5	1/120
28	8	2	1/2
29	6	2	1/2
30	4	2	1/2

Задача 4

На кожній з п'яти однакових карток (A) надрукована одна з наступних літер: "а", "м", "р", "т", "ю". Картки ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що на чотирьох (B) вийнятих по одній картці можна прочитати слово "юрта".

Рішення: Використовуємо класичне визначення ймовірності: **P=m/n**, де m – число випадків, що сприяють здійсненню події, а n – число всіх рівно можливих елементарних результатів.

$n=5\cdot4\cdot3\cdot2=120$ способів, так як першу картку (літеру) можна витягнути (вибрати) 5 способами (так як все карток п'ять), другу – 4 (залишилося до цього кроку чотири), третю – 3 і четверту – 2 способами. **m=1**, так як шукана послідовність карток "ю", потім "н", потім "т", потім "а" тільки одна.

Отримаємо ймовірність **P=1/120**.

Відповідь: 1/120.

Таблиця 11 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	S
1	5	4	1/120
2	6	4	1/360
3	7	4	1/840
4	8	4	1/1680
5	9	4	1/3024
6	10	4	1/5040
7	5	5	1/120
8	6	5	1/720
9	7	5	1/2520
10	8	5	1/6720
11	9	5	1/15120
12	10	5	1/30240
13	5	3	1/60
14	6	3	1/120
15	7	3	1/210
16	8	3	1/336
17	9	3	1/504
18	10	3	1/720
19	6	6	1/720
20	7	6	1/5040
21	8	6	1/20160
22	9	6	1/60480
23	7	7	1/5040
24	8	7	1/20160
25	9	7	1/60480
26	5	3	1/60
27	6	3	1/120
28	7	3	1/210
29	8	3	1/336
30	9	3	1/504

Задача 5

В партії з 25 виробів (А) міститься 15 виробів першого сорту (В) і 10 – другого (З). Випадковим чином вибираються 3 вироби (D). Знайти ймовірність того, що серед вибраних хоча б один виріб першого сорту.

Рішення. Введемо подію:

X = (Серед обраних хоча б один виріб першого сорту). Розглянемо протилежне йому подію:

$\overline{X}$ = (Серед обраних виробів немає першого сорту).

Використовуємо класичне визначення ймовірності: P=m/n, де m – число випадків, що сприяють здійсненню події, а n – число всіх рівно можливих елементарних результатів.

$$n = C_{25}^{3} = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3} = 2300$$

– число способів вибрати будь-які 3 вироби з 25.

$m = C_{10}^{3} = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ – число різних способів вибрати 3 вироби другого сорту (з 10). Шукана ймовірність дорівнює

$$P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - \frac{m}{n} = 1 - \frac{120}{2300} = \frac{109}{115} = 0{,}948$$

Відповідь: 0,948.

Таблиця 12 – Дані для варіантів рішень

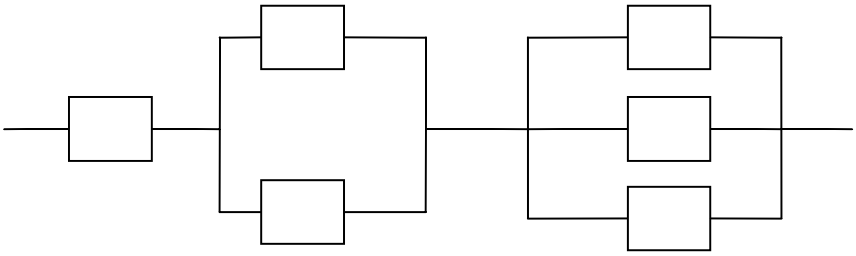
№	A	B	C	D	S
1	25	15	10	3	0,948
2	25	16	9	3	0,963
3	25	17	8	3	0,976
4	25	18	7	3	0,985
5	25	19	6	3	0,991
6	25	20	5	3	0,996
7	25	21	4	3	0,998
8	25	22	3	3	1,000
9	25	15	10	4	0,983
10	25	16	9	4	0,990
11	25	17	8	4	0,994
12	25	18	7	4	0,997
13	25	19	6	4	0,999
14	25	20	5	4	1,000
15	25	21	4	4	1,000

№	A	B	C	D	S
16	25	15	10	5	0,995
17	25	16	9	5	0,998
18	25	17	8	5	0,999
19	25	18	7	5	1,000
20	25	19	6	5	1,000
21	25	20	5	5	1,000
22	25	15	10	2	0,850
23	25	16	9	2	0,880
24	25	17	8	2	0,907
25	25	18	7	2	0,930
26	25	19	6	2	0,950
27	25	20	5	2	0,967
28	25	21	4	2	0,980
29	25	22	3	2	0,990
30	25	23	2	2	0,997

Задача 6

Дана схема включення елементів. Ймовірність відмови кожного елемента протягом часу Т дорівнює 0,5 (А).

Обчислити ймовірність відмови всього



ланцюга.

Рисунок 1 – Схема включення елементів Варіант А

Рішення. Розглянемо події:

Послідовна система.

В системі з послідовною структурою відмова будь-якого компонента призводить до відмови системи в цілому.

Ймовірність безвідмовної роботи:

$$P_s = p_1 \text{ x } p_2 \text{ x } p_3$$

У загальному випадку ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює:

$$P_s = \prod_{i=1}^{N} p_i$$

Паралельна система

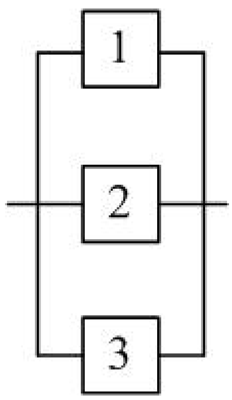


Рисунок 2 – Приклад паралельної системи

Ймовірність безвідмовної роботи:

$$P_s = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_2)$$

У загальному випадку ймовірність безвідмовної роботи системи дорівнює:

$$P_s = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)$$

$$P(B) = P(A_1) \cdot \left(1 - P\overline{A_2} \cdot P\overline{A_3}\right) \cdot \left(1 - P\overline{A_4} \cdot P\overline{A_5} \cdot P\overline{A_6}\right) =$$
$$= P(A_1) \cdot \left(1 - (1 - (1 - PA_2) \cdot (1 - PA_3)\right) \cdot \left(1 - (1 - PA_4) \cdot (1 - PA_5) \cdot (1 - PA_6)\right) =$$
$$= 0{,}5 \cdot (1 - \left(1 - 0{,}5\right) \cdot \left(1 - 0{,}5\right)) \cdot (1 - \left(1 - 0{,}5\right) \cdot \left(1 - 0{,}5\right) \cdot \left(1 - 0{,}5\right)) \approx 0{,}328$$

Відповідь: Ймовірність відмови ланцюга складе 0,328; або ймовірність безвідмовної роботи складе 0,672.

Варіанти схем

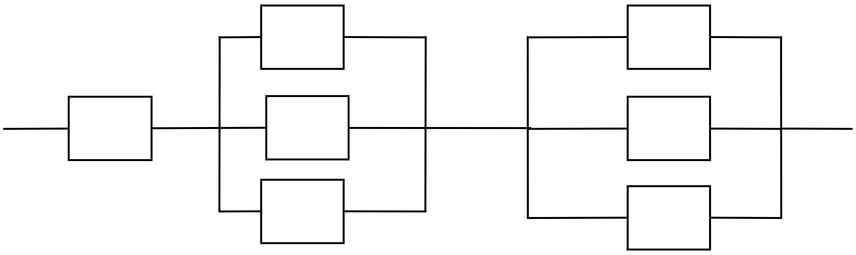


Рисунок 3 – Схема включення елементів Варіант B

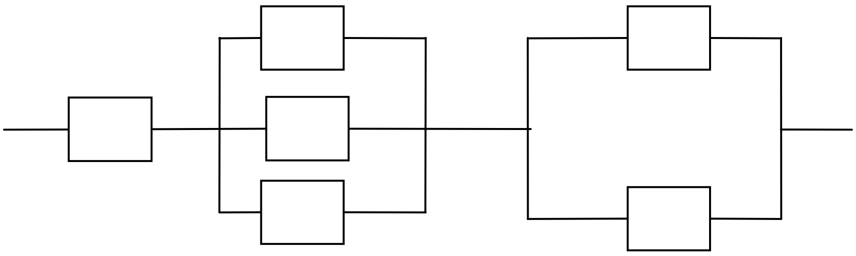


Рисунок 4 – Схема включення елементів Варіант C

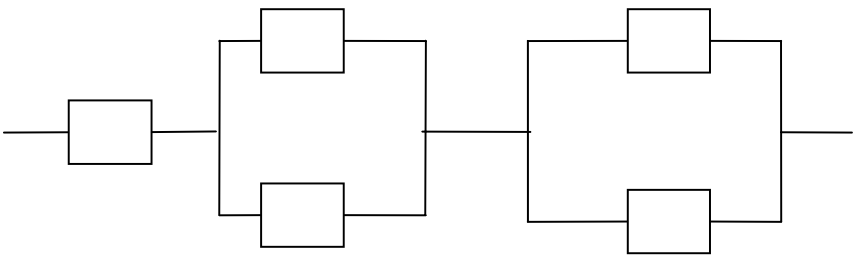


Рисунок 5 – Схема включення елементів Варіант D

Таблиця 13 – Дані для варіантів рішень

№	A	Номер схем	S
1	0,5	A	0,328
2	0,1	A	0,005
3	0,7	A	0,620
4	0,8	A	0,762
5	0,9	A	0,890
6	0,1	A	0,005
7	0,2	A	0,035
8	0,3	A	0,101
9	0,4	A	0,201
10	0,5	B	0,383
11	0,6	B	0,526
12	0,7	B	0,663
13	0,8	B	0,787
14	0,9	B	0,898
15	0,1	B	0,007

№	A	Номер схем	S
16	0,2	B	0,048
17	0,3	B	0,129
18	0,4	B	0,246
19	0,5	C	0,328
20	0,6	C	0,472
21	0,7	C	0,620
22	0,8	C	0,762
23	0,9	C	0,890
24	0,1	C	0,005
25	0,2	C	0,035
26	0,3	C	0,101
27	0,4	C	0,201
28	0,5	D	0,281
29	0,6	D	0,423
30	0,7	D	0,580

Задача 7

Прилад проходить незалежні випробування. Ймовірність виходу з ладу приладу при одному випробуванні дорівнює 0,2 (B). Випробувано незалежно 100 приладів (A). Знайти ймовірність виходу з ладу не більше одного (C) приладу.

Рішення. Маємо схему Бернуллі з параметрами п = 100 (кількість приладів), р = 0,2 (ймовірність того, що прилад вийде з ладу). Будемо використовувати формулу $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ (ймовірність того, що з n приладів рівно до вийдуть з ладу).

Шукана ймовірність виходу з ладу не більше одного приладу дорівнює

$$P_{100}(k \le 1) = P_{100}(0) + P_{100}(1) = C_{100}^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^{100} + C_{100}^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{99} =$$
$$= 0{,}8^{100} + 100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{99} \approx 0{,}53 \cdot 10^{-8} \approx 0$$

Відповідь: 0.

Таблиця 14 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	S
1	100	0,20	1	5,3E–09
2	90	0,15	1	7,5E–06
3	80	0,14	1	8,07E–05
4	70	0,13	1	0,000669
5	60	0,12	1	0,004284
6	50	0,11	1	0,021165
7	40	0,10	1	0,080474
8	30	0,05	1	0,553542
9	20	0,03	1	0,880162
10	10	0,01	1	0,995734
11	100	0,20	2	6,32E–08
12	90	0,15	2	5,59E–05
13	80	0,14	2	0,000488
14	70	0,13	2	0,003207
15	60	0,12	2	0,015824

№	A	B	C	S
16	50	0,11	2	0,05811
17	40	0,10	2	0,157115
18	30	0,05	2	0,473276
19	20	0,03	2	0,642624
20	10	0,01	2	0,908534
21	100	0,20	3	5,15E–07
22	90	0,15	3	0,000287
23	80	0,14	3	0,002045
24	70	0,13	3	0,010723
25	60	0,12	3	0,040956
26	50	0,11	3	0,112033
27	40	0,10	3	0,215103
28	30	0,05	3	0,341688
29	20	0,03	3	0,562134
30	10	0,01	3	0,904494

ЗАНЯТТЯ №3. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Якщо ***випадкова величина*** X дискретна, то її математичне сподівання дорівнює сумі добутків усіх можливих значень на ймовірності цих значень

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

У цій формулі **n** – кінцева величина або $\boldsymbol{n}=\infty$

Якщо випадкова величина X неперервна з щільністю $f(x)$, то її математичне сподівання дорівнює наступного інтегралу

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$$

Дисперсія – це математичне очікування квадрата центрованої випадкової величини

$$D[X]=M\left[(X-m_X)^2\right]$$

Середнє квадратичне відхилення – це квадратний корінь з дисперсії $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$ Зазвичай для обчислення дисперсії використовується наступна розрахункова формула

$$D[X]=M\left[X^2\right]-(m_X)^2$$

Величина $M\left[X^2\right]$ знаходиться:

$$M\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \quad M\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

Модою $\boldsymbol{d_X}$ випадкової величини X називається найбільш ймовірне її значення, тобто значення, для якого ймовірність $\boldsymbol{p_i}$ або щільність розподілу $f(x)$ максимальна.

Медіаною $\boldsymbol{h_X}$ випадкової величини X називають таке значення випадкової величини, для якого

$$P(X<h_X)=P(X\geq h_X)=0{,}5$$

3.1 Задачі по заняттю №3

Задача 1

Дві гармати стріляють по цілі; ймовірності попадання ціль при одному пострілі для них рівні відповідно 0,7 (A) і 0,8 (B). Для випадкової величини X (числа влучень у мішень при одному залпі) скласти ряд розподілу, побудувати багатокутник розподілу, знайти функцію розподілу, математичне сподівання (S).

Рішення. Випадкова величина **X (X** – число влучень у ціль) може приймати три значення:0, 1, 2. Знайдемо ймовірності, з якими ці значення приймаються. Випадкова величина X приймає значення 0, якщо обидва знаряддя не потрапили в ціль. Значить, P(X=0) = (1–0,7)(1–0,8)= 0,06.

Випадкова величина **X** приймає значення 1, якщо мета потрапило рівно одне знаряддя. Значить:

$$P(X=1)=0{,}7\cdot(1-0{,}8)+(1-0{,}7)\cdot 0{,}8=0{,}14+0{,}24=0{,}38$$

Нарешті, **X** = 2, якщо тільки обидва знаряддя потрапили в ціль. Отже, P(X=2)= 0,7*0,8 = 0,56.
Складаємо ряд розподілу.

X	0	1	2
p	0,06	0,38	0,56

Полігон розподілу будуємо на рисунку 6. Знаходимо функцію розподілу $F(x)$. Згідно теорії $F(x)=0$ при $x \le 0$; $F(x)=0,06$ при $x \in (0;1]$; $F(x)=0,44+0,56=1$ при $x>1$.

Графік $F(x)$ зображено на рисунку 7.

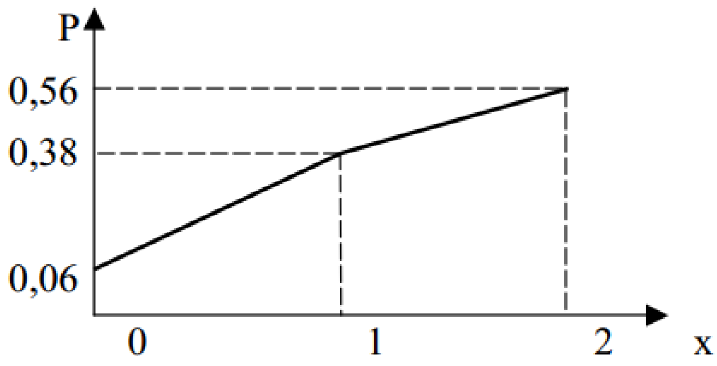


Рисунок 6 – Полігон розподілу

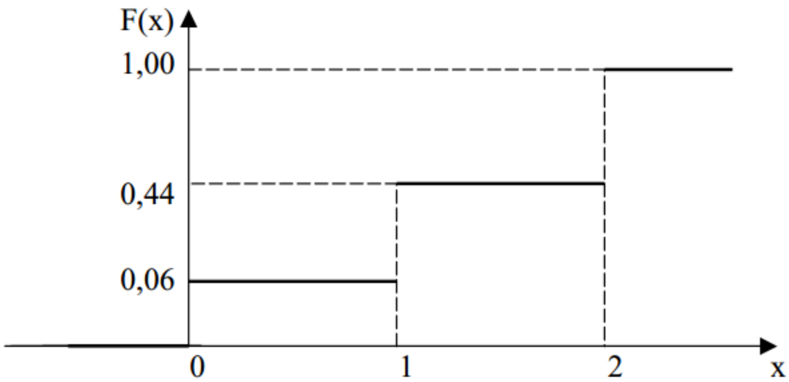


Рисунок 7 – Графік функції розподілу $F(x)$

Знаходимо математичне сподівання M[X], використовуючи отриманий ряд розподілу.

M[X] = 0·0,06 + 1·0,38 + 2·0,56 = 1,5.

Відповідь: M[X] = 1,5

Таблиця 15 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	S
1	0,7	0,80	1,5
2	0,75	0,80	1,55
3	0,8	0,80	1,6
4	0,85	0,80	1,65
5	0,9	0,80	1,7
6	0,95	0,80	1,75
7	0,7	0,85	1,55
8	0,75	0,85	1,6
9	0,8	0,85	1,65
10	0,85	0,85	1,7
11	0,9	0,85	1,75
12	0,95	0,85	1,8
13	0,7	0,90	1,6
14	0,75	0,90	1,65
15	0,8	0,90	1,7
16	0,85	0,90	1,75
17	0,9	0,90	1,8
18	0,95	0,90	1,85
19	0,7	0,95	1,65
20	0,75	0,95	1,7
21	0,8	0,95	1,75
22	0,85	0,95	1,8
23	0,9	0,95	1,85
24	0,95	0,95	1,9
25	0,6	0,60	1,2
26	0,65	0,60	1,25
27	0,7	0,60	1,3
28	0,75	0,60	1,35
29	0,8	0,60	1,4
30	0,85	0,60	1,45

Задача 2

Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad при\ x \le 2\\ 0{,}5x-1 \quad при\ 2<x\le 4\\ 1 \quad при\ x>4\end{cases}$$

Знайти ймовірності того, що в результаті випробування X прийме значення: a) менше 3 (A); b) не менше 3 (B); c) з проміжку [0; 2,6) (C); d) з проміжку [3; 5) (D).

Рішення. По визначенню $F(x)$ маємо

a) F(X<3)= F(3)= 0,5 3 –1 = 0,5.

Далі, так як події X<3 і X>3 протилежні, то

b) $F(X>3)=1-P(X<3)=1-0{,}5=0{,}5$

Знаходимо дві останні ймовірності

c) $F(0 \le X < 2{,}6)=F(2{,}6)-F(0)=(0{,}5*2{,}6-1)-0=0{,}3$

d) $F(3 \le X < 5)=F(5)-F(3)=1-(0{,}5*0{,}3-1)=0{,}5$

Відповідь: a) 0,5; b) 0,5; c) 0,3; d) 0,5.

Таблиця 16 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C		D		a	b	c	d
1	3,0	3,0	0,0	2,6	3,0	5,0	0,50	0,50	0,30	0,5
2	3,1	3,1	0,0	2,6	3,1	5,1	0,55	0,55	0,30	0,5
3	3,2	3,2	0,0	2,6	3,2	5,2	0,60	0,60	0,30	0,4
4	3,3	3,3	0,0	2,5	3,3	5,3	0,65	0,65	0,25	0,4
5	3,4	3,4	0,0	2,5	3,4	5,4	0,70	0,70	0,25	0,3
6	3,5	3,5	0,0	2,4	3,5	5,5	0,75	0,75	0,20	0,3
7	3,6	3,6	0,0	2,4	3,6	5,6	0,80	0,80	0,20	0,2
8	3,7	3,7	0,0	2,3	3,7	5,7	0,85	0,85	0,15	0,2
9	3,8	3,8	0,0	2,3	3,8	5,8	0,90	0,90	0,15	0,1
10	3,9	3,9	0,0	2,1	3,9	5,9	0,95	0,95	0,05	0,1
11	4,0	4,0	0,0	2,1	4,0	6,0	1,00	1,00	0,05	0
12	2,0	2,0	0,0	3,1	3,0	4,0	0,00	0,00	0,55	0,5
13	2,1	2,1	0,0	3,0	3,0	4,1	0,05	0,05	0,50	0,5
14	2,2	2,2	0,0	2,9	3,0	4,2	0,10	0,10	0,45	0,5
15	2,3	2,3	0,0	2,8	3,0	4,3	0,15	0,15	0,40	0,5
16	2,4	2,4	0,0	2,7	3,0	4,4	0,20	0,20	0,35	0,5
17	2,5	2,5	0,0	2,6	3,0	4,5	0,25	0,25	0,30	0,5
18	2,6	2,6	0,0	2,5	3,0	4,6	0,30	0,30	0,25	0,5
19	2,7	2,7	0,0	2,4	3,0	4,7	0,35	0,35	0,20	0,5
20	2,8	2,8	0,0	2,3	3,0	4,8	0,40	0,40	0,15	0,5
21	2,9	2,9	0,0	2,2	3,0	4,9	0,45	0,45	0,10	0,5
22	3,0	3,0	0,0	2,1	3,0	5,0	0,50	0,50	0,05	0,5
23	2,0	2,0	0,0	4,1	2,0	4,0	0,00	0,00	1,00	1
24	2,1	2,1	0,0	4,0	2,2	4,1	0,05	0,05	1,00	0,9
25	2,2	2,2	0,0	3,9	2,4	4,2	0,10	0,10	0,95	0,8
26	2,3	2,3	0,0	3,8	2,6	4,3	0,15	0,15	0,90	0,7
27	2,4	2,4	0,0	3,7	2,8	4,4	0,20	0,20	0,85	0,6
28	2,5	2,5	0,0	3,6	3,0	4,5	0,25	0,25	0,80	0,5
29	2,6	2,6	0,0	3,5	3,2	4,6	0,30	0,30	0,75	0,4
30	2,7	2,7	0,0	3,4	3,4	4,7	0,35	0,35	0,70	0,3

Задача 3

Безперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x) = 1{,}5\sin(3x)$ (A) в інтервалі $(0;\pi/3)$ (B; C) і $f(x) = 0$ поза цим інтервалом. Знайти ймовірність того, що при трьох дослідах X двічі потрапить в інтервал $(\pi/6;\pi/4)$ (D; E)

Розв'язання. Введемо подію А (при досвіді випадкова величина Х потрапить в інтервал $(\pi/6;\pi/4)$). Тоді:

$$P(A) = P(\pi/6 < X < \pi/4) = \int_{\pi/6}^{\pi/4} 1,5 \cdot \sin(3x)dx =$$

$$= -0,5 \cdot \cos(3x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} =$$

$$= -0,5\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0,354$$

Далі шукана ймовірність знаходиться за формулою Бернуллі
$P_3(2) = C_3^2 \cdot (0,354)^2 \cdot (1-0,354) = 0,243$

Відповідь: 0,243.

Таблиця 17 – Дані для варіантів рішень

№	A	B	C	D	E	S
1	1,5*sin(3*x)	0	π/3	π/6	π/4	0,242
2	1,5*sin(3*x)	0	π/3	π/5	π/3	0,444
3	1,5*sin(3*x)	0	π/3	π/4	π/2	0,242
4	2*sin(2*x)	0	π/4	π/6	π/2	0,375
5	2*sin(2*x)	0	π/4	π/5	π/2	0,443
6	2*sin(2*x)	0	π/4	π/4	π/3	0,375
7	2,5*sin(3*x)	0	π/3	π/6	π/4	0,428
8	2,5*sin(3*x)	0	π/3	π/7	π/3	0,443
9	2,5*sin(3*x)	0	π/3	π/8	π/3	0,386
10	3*sin(2*x)	0	π/4	π/6	π/2	0,422
11	3*sin(2*x)	0	π/4	π/7	π/2	0,416
12	3*sin(2*x)	0	π/4	π/8	π/2	0,325
13	3,5*sin(3*x)	0	π/2	π/5	π/2	0,249
14	3,5*sin(3*x)	0	π/2	π/6	π/4	0,357
15	3,5*sin(3*x)	0	π/2	π/7	π/5	0,027
16	4*sin(2*x)	0	π/3	π/7	π/2	0,420
17	4*sin(2*x)	0	π/3	π/8	π/2	0,426
18	4*sin(2*x)	0	π/3	π/9	π/2	0,349
19	4,5*sin(*x)	0	π/4	π/6	π/5	0,346
20	4,5*sin(*x)	0	π/4	π/7	π/4	0,433
21	4,5*sin(*x)	0	π/4	π/8	π/4	0,365
22	5*sin(*x)	0	π/2	π/7	π/2	0,156
23	5*sin(*x)	0	π/2	π/8	π/2	0,431
24	5*sin(*x)	0	π/2	π/9	π/2	0,426
25	5,5*sin(*x)	0	π/3	π/6	π/5	0,417
26	5,5*sin(*x)	0	π/3	π/7	π/5	0,063
27	5,5*sin(*x)	0	π/3	π/8	π/4	0,430
28	6*sin(*x)	0	π/4	π/6	π/2,5	0,188
29	6*sin(*x)	0	π/4	π/7	π/2,5	0,412
30	6,5*sin(*x)	0	π/2	π/6	π/5	0,444

Задача 4

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілу

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Розв'язання. Математичне сподівання випадкової величини X знаходимо за формулою

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = 5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3$$

Математичне сподівання випадкової величини X^2 знаходимо за формулою

$$M\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i = (-5)^2\cdot 0{,}4+2^2\cdot 0{,}3+3^2\cdot 0{,}1+4^2\cdot 0{,}2=15{,}3$$

Тепер знаходимо дисперсію за формулою

$$D[X]=M\left[X^2\right]-(m_X)^2=15{,}3-(-0{,}3)^2=15{,}21$$

Знаходимо середнє квадратичне відхилення

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$$

Відповідь: $M[X]=-0{,}3$; $\boldsymbol{D_X}=15{,}21$; $\sigma_X=3{,}9$

Таблиця 18 – Дані для варіантів рішень

№	X(p)				M(x)	M(x^2)	D(x)	σ(x)
1	–5(0,4)	2(0,3)	3(0,1)	4(0,2)	–0,30	15,30	15,21	3,90
2	–5(0,2)	2(0,4)	3(0,2)	4(0,2)	1,20	11,60	10,16	3,19
3	–5(0,1)	2(0,2)	3(0,7)	4(0,5)	4,00	17,60	1,60	1,26
4	–5(0,3)	2(0,4)	3(0,3)	4(0,1)	0,60	13,40	13,04	3,61
5	–5(0,4)	2(0,4)	3(0,2)	4(0,2)	0,20	16,60	16,56	4,07
6	–5(0,3)	2(0,3)	3(0,4)	4(0,1)	0,70	13,90	13,41	3,66
7	–5(0,1)	2(0,3)	3(0,1)	4(0,2)	1,20	7,80	6,36	2,52
8	–5(0,2)	2(0,4)	3(0,2)	4(0,2)	1,20	11,60	10,16	3,19
9	–5(0,3)	2(0,3)	3(0,1)	4(0,2)	0,20	12,80	12,76	3,57
10	–3(0,4)	1(0,3)	2(0,1)	4(0,2)	0,10	7,50	7,49	2,74
11	–3(0,3)	1(0,4)	2(0,2)	4(0,2)	0,70	7,10	6,61	2,57
12	–3(0,2)	1(0,1)	2(0,5)	4(0,2)	1,30	7,10	5,41	2,33
13	–3(0,3)	1(0,4)	2(0,3)	4(0,1)	0,50	5,90	5,65	2,38
14	–3(0,4)	1(0,4)	2(0,2)	4(0,2)	0,40	8,00	7,84	2,80
15	–3(0,3)	1(0,3)	2(0,4)	4(0,1)	0,60	6,20	5,84	2,42
16	–3(0,1)	1(0,3)	2(0,2)	4(0,2)	1,20	5,20	3,76	1,94
17	–3(0,6)	1(0,4)	2(0,2)	4(0,2)	–0,20	9,80	9,76	3,12
18	–4(0,4)	3(0,3)	2(0,1)	1(0,2)	–0,30	9,70	9,61	3,10
19	–4(0,1)	3(0,4)	2(0,2)	1(0,2)	1,40	6,20	4,24	2,06
20	–4(0,1)	3(0,2)	2(0,7)	1(0,5)	2,10	6,70	2,29	1,51
21	–4(0,3)	3(0,4)	2(0,3)	1(0,1)	0,70	9,70	9,21	3,03
22	–4(0,4)	3(0,4)	2(0,2)	1(0,2)	0,20	11,00	10,96	3,31
23	–4(0,3)	3(0,3)	2(0,4)	1(0,1)	0,60	9,20	8,84	2,97
24	–4(0,1)	3(0,3)	2(0,1)	1(0,2)	0,90	4,90	4,09	2,02
25	–6(0,1)	3(0,4)	4(0,2)	1(0,2)	1,60	10,60	8,04	2,84
26	–6(0,1)	3(0,2)	4(0,7)	1(0,5)	3,30	17,10	6,21	2,49
27	–6(0,3)	3(0,4)	4(0,3)	1(0,1)	0,70	19,30	18,81	4,34
28	–6(0,4)	3(0,4)	4(0,2)	1(0,2)	–0,20	21,40	21,36	4,62
29	–6(0,3)	3(0,3)	4(0,4)	1(0,1)	0,80	20,00	19,36	4,40
30	–6(0,1)	3(0,3)	4(0,1)	1(0,2)	0,90	8,10	7,29	2,70

Задача 5

На маршруті довжиною 100 км є 10 підстанцій. Для проектування будівництва будівлі з обслуговуючим персоналом, інспекторів та аварійних бригад були зібрані дані про число передбачуваних поїздок на підстанції. Результати обстеження наведені в таблиці.

На якому кілометрі розташована підстанція, км	7	26	28	37	40	46	60	78	86	92	Всього
Проектоване число поїздок, од.	10	15	5	20	5	25	15	30	10	64	199

Розв'язання:

Варіант 1. Якщо будівля поставити на середині маршруту, т. Е. На 50-му кілометрі (середня арифметична), то пробіги з урахуванням числа поїздок складуть:

в одному напрямку

$43 \cdot 10 + 24 \cdot 15 + 22 \cdot 5 + 13 \cdot 20 + 10 \cdot 5 + 4 \cdot 25 = 1310$ км;

в протилежному

$10 \cdot 15 + 28 \cdot 30 + 36 \cdot 10 + 42 \cdot 65 = 4080$ км;

Загальний пробіг в обидва напрямки виявиться рівним +5390 км.

Варіант 2. Зменшення пробігу можна досягти, якщо будівлю поставити на 63,85-му кілометрі, т. Е. На середній ділянці маршруту з урахуванням числа поїздок (середня арифметична зважена). У цьому випадку пробіги складуть по 2475,75 км в обидва напрямки, т. Е. Загальний пробіг складе 4951,5 км і виявиться менше, ніж при першому варіанті, на 438,5 км.

Варіант 3. Найкращий результат, тобто . Мінімальний загальний пробіг, отримаємо, якщо поставимо будівлю на 78-му кілометрі, що буде відповідати медіані. Тоді пробіги складуть 3 820 км і 990 км. Загальний пробіг дорівнює 4810 км, та ін. Він виявився меншим, загальних пробігів, розрахованих за попереднім варіантам.

Таблиця 19 – Дані для варіантів рішень

№												Розв'язання I	Розв'язання II	Розв'язання III
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	На якому кілометрі розташована підстанція, км	7	26	28	37	40	46	60	78	86	92	5348,0	4924,6	4796,0
	Проектоване число поїздок, од.	10	15	5	20	5	25	15	30	10	64			
2	На якому кілометрі розташована підстанція, км	5	15	17	35	42	55	64	81	89	97	5440,0	5147,8	6420,0
	Проектоване число поїздок, од.	25	10	15	20	17	21	18	24	20	29			
3	На якому кілометрі розташована підстанція, км	6	12	15	28	32	44	50	68	79	91	5261,0	5241,4	7225,0
	Проектоване число поїздок, од.	12	24	16	31	15	18	10	24	20	29			

Продовження таблиці 19

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
4	На якому кілометрі розташована підстанція, км	7	13	16	22	41	52	64	76	81	95	5280,0	5257,4	6640,0
	Проектоване число поїздок, од.	10	15	25	25	21	22	8	25	23	25			
5	На якому кілометрі розташована підстанція, км	8	14	17	25	31	42	51	62	75	92	5116,0	5235,8	7468,0
	Проектоване число поїздок, од.	12	24	16	31	15	18	10	24	20	29			
6	На якому кілометрі розташована підстанція, км	7	15	21	34	45	48	60	71	85	97	5094,0	5269,0	6714,0
	Проектоване число поїздок, од.	12	24	16	31	15	18	10	24	20	29			
7	На якому кілометрі розташована підстанція, км	7	26	28	37	40	46	60	78	86	92	4598,0	5241,7	5406,0
	Проектоване число поїздок, од.	6	14	20	26	15	22	17	25	25	29			
8	На якому кілометрі розташована підстанція, км	5	15	17	35	42	55	64	81	89	97	5261,0	5318,2	6521,0
	Проектоване число поїздок, од.	16	17	14	27	22	19	14	18	25	27			
9	На якому кілометрі розташована підстанція, км	7	13	16	22	41	52	64	76	81	95	5145,0	5194,9	6697,0
	Проектоване число поїздок, од.	20	17	16	20	22	21	19	24	21	19			
10	На якому кілометрі розташована підстанція, км	8	14	17	25	31	42	51	62	75	92	4146,0	5184,9	7648,0
	Проектоване число поїздок, од.	4	22	19	31	23	25	23	24	20	8			

ЗАНЯТТЯ №4. ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ В ПРОГРАМІ EXCEL

Дослідницька робота пов'язана з необхідністю правильно знімати і обробляти експериментальні дані. Виділяють наступні помилки:

Приладові похибки. Ця похибка дорівнює тій частці шкали приладу, до якої з упевненістю можна робити відлік, що визначається конструкцією і ціною поділки шкали приладу.

Систематичні помилки викликаються неправильною конструкцією приладів, їх несправністю, недостатньо продуманої методикою експерименту, наявністю неврахованих факторів, що впливають на вимірювану величину

Випадкові помилки усунути не можна, а також не можна вивести ніякої формули для виправлення отриманого результату.

Для розрахунку помилок можна використовувати співвідношення, наведені в таблиці 20.

Таблиця 20 – Формули для розрахунку абсолютних і відносних помилок

Формула	**Абсолютна**	**Відносна**
$x = a \pm b$	$\Delta x = \Delta a + \Delta b$	$\varepsilon = (\Delta a + \Delta b) / (a \pm b)$
$x = a * b$; $x = a * k$	$\Delta x = b\Delta a + a\Delta b$; $\Delta x = k\Delta a$	$\varepsilon = \Delta a/a + \Delta b/b = \varepsilon_a + \varepsilon_b$
$x = a / b$	$\Delta x = (b\Delta a + a\Delta b) / b^2$	$\varepsilon = \Delta a/a + \Delta b/b = \varepsilon_a + \varepsilon_b$
$x = a*k$; $(x = a / k)$	$\Delta x = \Delta a * k$; $(\Delta x = \Delta a/k)$	$\varepsilon = \varepsilon_a$
$x = a^2$	$\Delta x = 2a\Delta a$	$\varepsilon = 2\Delta a/a = 2\varepsilon_a$
$x = \sqrt{a}$	$\Delta x = \Delta a/(2\sqrt{a})$	$\varepsilon = \Delta a/2a = \varepsilon_a/2$

4.1 Задачі по заняттю №4

Задача 1

Обробка експериментальних даних в програмі Excel

У осередок А3 введемо текст «Дані експерименту», в комірки А5 і В5 – заголовки нової таблиці «№» і «Х». Передбачається що ми проробили серію з 10 дослідів, вимірюючи деяку величину Х. Номери дослідів від 1 до 10. Чисельні значення Х дослідів (табл. 21).

Таблиця 20 – Зразковий вид листа «Помилки»

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3	Данные эксперимента				Обработка	
4						
5	№	X				
6	1	14,85		Число значений n	СЧЕТ	10
7	2	14,80		Среднее значение Xср	СРЗНАЧ	14,803
8	3	14,84		Станд. отклонение S	СТАНДОТКЛОН	0,0643
9	4	14,81		Ст. откл. среднего S ср	=S / КОРЕНЬ(n)	0,0203
10	5	14,63		К.Стьюд (5%, n-1) t	СТЬЮДРАСПОБР	2,2622
11	6	14,81		Доверит. интервал ДИ	= t * $S_{ср}$	0,046
12	7	14,80		Относит ошибка δ	= ДИ / Xср	0,0031
13	8	14,85				
14	9	14,84				
15	10	14,80				

Обробку результатів почнемо з розрахунку числа дослідів n. Для визначення числа значень використовується спеціальна функція, що називається **РАХУНОК**. Для введення формули з функціями використовується Майстер функцій.

Перший крок роботи (Рисунок 8) служить для вибору потрібної функції. Список функцій впорядкований за алфавітом, що дозволяє вибрати потрібну нам функцію **РАХУНОК** («Підраховує кількість чисел у списку аргументів»). Виділивши клацанням цю функцію, натискаємо кнопку Ok і переходимо до кроку 2.

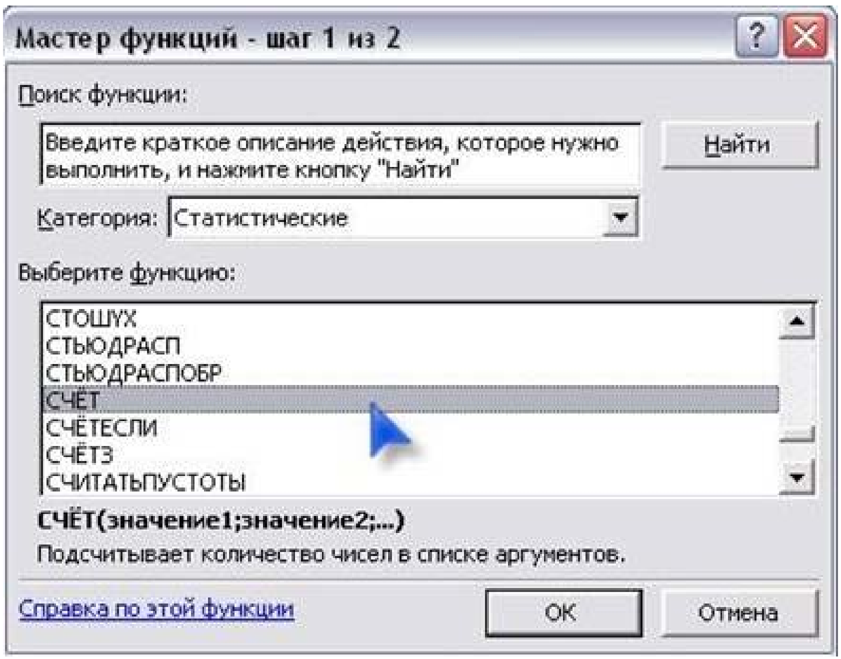


Рисунок 8 – Вибір функції

Другий шаг служить для завдання аргументів функції.

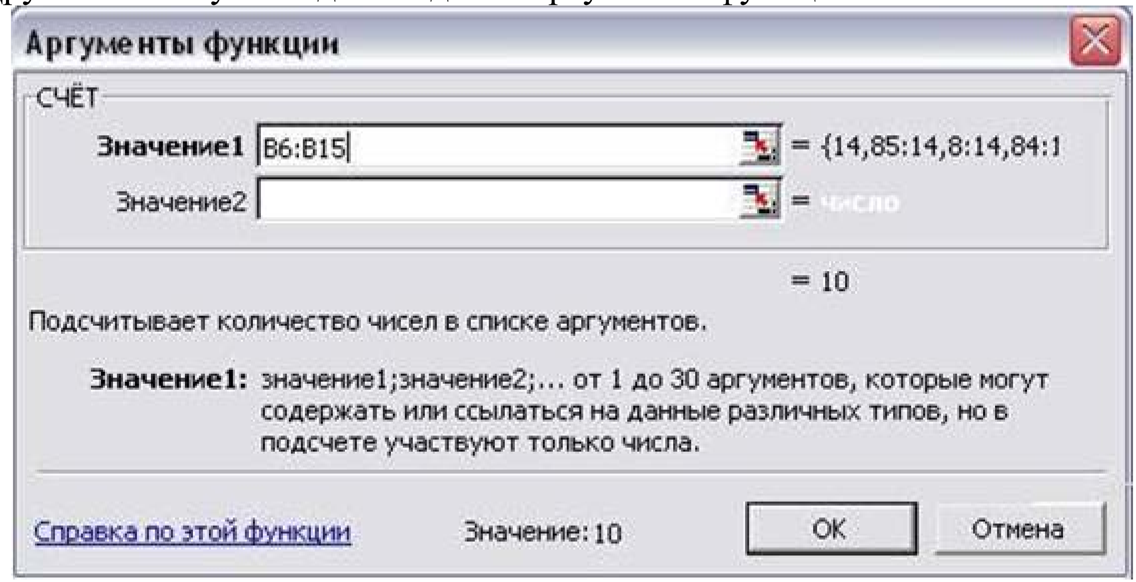


Рисунок 9 – Аргументи функції СЧЕТ

Функції **РАХУНОК** треба вказати, які числа їй треба перераховувати, або в яких осередках знаходяться ці числа. Діапазон комірок вказується адресами першої та останньої комірки, записаними через двокрапку, в нашому випадку дані знаходяться в осередках **B6: B15**. Як і в інших випадках ці адреси краще не вводити, а показати мишкою. Для цього встановлюємо покажчик мишки на перший осередок, натискаємо ліву кнопку і ведемо до останньої. Закінчується робота з майстром функцій натисканням кнопки "Ok" або клавіші "Enter". Якщо все зроблено правильно, в комірці F6 з'явиться потрібне значення "10".

Наступні два етапи обробки серії дослідів проводяться аналогічно. В осередку F7 с допомогою функції СРЗНАЧ розраховується середнє значення вибірки, в комірці F8 – стандартне відхилення вибірки, за допомогою функції СТАНДОТКЛОН.В.

Наступна формула складна, частково вона набирається як звичайна формула, починаючи з символу "=". Функція КОРІНЬ – математична, тому вибираємо категорію математичних функцій. Аргументом цієї функції служить число дослідів, яке ми розрахували в комірці F6. Остаточний вигляд формули "= F8 / КОРІНЬ (F6)".

Для розрахунку довірчого інтервалу необхідно визначити коефіцієнт Стьюдента. Він залежить від ймовірності помилки (при зазвичай задається надійності 95% ймовірність помилки становить 5%), і від числа ступенів свободи n–1). Для знаходження коефіцієнта Стьюдента використовується статистична функція Excel СТЬЮДРАСПОБР ("Стьюдента розподіл зворотне") В Excel 2010 ця функція СТЬЮДЕНТ.ОБР.2Х. Особливістю цієї функції є те, що перший аргумент, число 5% (або 0,05) вводиться у відповідне вікно з клавіатури. Для другого вказуємо адресу комірки, де знаходиться значення n, потім дописуємо у вікні "–1". Отримуємо запис "F6–1".

Для знаходження довірчого інтервалу використовується звичайна формула множення. Як правило, значення довірчого інтервалу округляється до однієї значущої цифри, такий же порядок оточення має бути й у середнього. Тому остаточний результат можна записати так: з 95%-ної надійністю X = 14,80 ± 0,05. На закінчення порахуємо відносну помилку визначення X: δ = ДІ / Xср (формула: "= F11 / F7"). Значення відносної помилки зазвичай виражають у відсотках, у нас 0,3%.

Один раз підготував лист Excel для обробки даних, можна скопіювати його, і ввести результати нової серії дослідів в колонку B. Результати будуть розраховані автоматично.

Таблиця 21 – Дані для варіантів рішень

№	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5	Варіант 6	Варіант 7	Варіант 8	Варіант 9	Варіант 10
1	14,85	14,65	14,50	14,30	14,13	13,95	13,77	13,59	13,41	13,23
2	14,80	14,80	14,35	14,20	13,98	13,75	13,53	13,30	13,08	12,85
3	14,84	14,62	14,78	14,65	14,62	14,58	14,54	14,50	14,46	14,42
4	14,81	14,82	14,65	14,52	14,44	14,34	14,23	14,13	14,02	13,92
5	14,63	14,72	14,55	14,33	14,29	14,18	14,08	13,97	13,86	13,76
6	14,81	14,65	14,35	14,44	14,21	14,07	13,93	13,79	13,65	13,51
7	14,80	14,80	14,24	14,33	14,05	13,85	13,65	13,46	13,26	13,06
8	14,85	14,62	14,33	14,85	14,59	14,56	14,53	14,50	14,47	14,45
9	14,84	14,82	14,50	14,30	14,13	13,94	13,74	13,55	13,35	13,16
10	14,80	14,72	14,78	14,85	14,84	14,86	14,88	14,90	14,92	14,95

№	Варіант 11	Варіант 12	Варіант 13	Варіант 14	Варіант 15	Варіант 16	Варіант 17	Варіант 18	Варіант 19	Варіант 20
1	13,05	12,87	12,69	12,51	12,75	14,50	14,20	13,90	13,60	14,50
2	12,60	12,37	12,14	12,50	13,35	14,75	14,50	14,25	14,00	14,60
3	14,39	14,35	14,32	14,28	13,48	14,80	14,40	14,00	13,60	14,89
4	13,80	13,69	13,59	13,48	13,20	14,50	14,30	14,10	13,90	14,62
5	13,62	13,51	13,39	13,28	14,80	14,90	14,70	14,50	14,30	14,68
6	13,38	13,24	13,10	12,96	15,50	15,10	14,60	14,10	13,60	14,68
7	12,85	12,65	12,45	12,75	13,90	14,80	14,85	14,90	14,95	14,85
8	14,46	14,44	14,43	14,41	14,20	14,75	14,90	15,05	15,20	14,92
9	12,95	12,75	12,55	12,35	14,80	14,60	14,60	14,60	14,60	14,51
10	14,98	15,00	15,03	15,05	13,50	14,80	14,50	14,20	13,90	14,68

№	Варіант 21	Варіант 22	Варіант 23	Варіант 24	Варіант 25	Варіант 26	Варіант 27	Варіант 28	Варіант 29	Варіант 30
1	14,10	13,70	13,30	12,90	15,05	14,05	13,05	12,05	14,50	14,75
2	14,50	14,40	14,30	14,20	14,90	14,10	13,30	12,50	14,20	14,48
3	14,60	14,31	14,02	13,73	14,85	14,12	13,39	12,66	14,50	14,65
4	14,20	13,78	13,36	12,94	14,95	14,22	13,49	12,76	14,30	14,45
5	14,50	14,32	14,14	13,96	14,85	14,12	13,39	12,66	14,22	14,65
6	14,50	14,32	14,14	13,96	14,85	14,13	13,41	12,69	14,30	14,68
7	14,40	13,95	13,50	13,05	14,98	14,15	13,32	12,49	14,35	14,75
8	14,21	13,49	12,78	12,06	14,77	14,20	13,63	13,06	14,25	14,62
9	14,22	13,93	13,64	13,35	14,98	14,25	13,52	12,79	14,22	14,64
10	14,60	14,52	14,44	14,36	14,88	14,12	13,36	12,60	14,35	14,40

Задача 2

Вивчення залежностей

Часто в дослідженнях вивчається залежність деякої величини від іншої. Характер цих залежностей прагнуть висловити математичними формулами, коефіцієнти якої можуть мати певний фізичний зміст. Найбільш уживана і проста в обробці лінійна залежність, яку можна виразити рівнянням прямої $y = kx + b$. При цьому коефіцієнт k показує ступінь впливу x на y, а b – деяке початкове значення y. Оскільки значення, отримані в ході експерименту, завжди включають деяку помилку, експериментальні крапки не лежать строго на прямій. Для цього використовується статистичний метод «найменших квадратів» пропонує досить складні функції для знаходження коефіцієнтів k і b, а також для оцінки їх достовірності.

В Excel це завдання вирішується за допомогою статистичних функцій НАХИЛ (нахил прямої відносно осі X, коефіцієнт k) і ОТРЕЗОК (відрізок відсікається прямою на осі Y, коефіцієнт b). Крім того, Excel дозволяє побудувати графік залежності, саму пряму, яка називається лінією тренда, а також вивести рівняння прямої на графік.

Для знайомства з цим можливостями перейдемо на Лист 3 нашої книги, назвемо його «Залежність» і введемо необхідні вихідні дані (табл. 22).

Таблиця 22 – Зразковий вид листа «Залежність»

	A	B	C	D	E	F
1	Линейная зависимость				Обработка	
2	№	X	Y			
3	1	1,85	3,28		НАКЛОН	1,42
4	2	2,70	4,20		ОТРЕЗОК	0,905
5	3	3,84	6,76		КВПИРСОН	0,981
6	4	4,81	8,60			
7	5	5,63	8,70			
8	6	6,81	10,82			
9	7	7,80	11,20			
10	8	8,85	14,50			
11	9	9,84	14,60			
12	10	10,50	15,50			

Введення формул проводиться за допомогою майстра функцій так, як це описувалося раніше. Маленьке відмінність полягає в тому, що у функцій НАХИЛ і ОТРЕЗОК два аргументи: діапазон комірок зі значеннями Y і діапазон комірок зі значеннями X. Також розраховується і значення функції ОТРЕЗОК в комірку F4.

Для оцінки достовірності можна використовувати квадрат коефіцієнта кореляції Пірсона (R2). Якщо він дорівнює 1, то має місце повна кореляція з моделлю, тобто точки лежать строго на прямій. У протилежному випадку, якщо коефіцієнт дорівнює 0, то рівняння лінійної залежності повністю невдало. Для його знаходження використовується статистична функція КВПІРСОН. Таким чином, дані нашого експерименту з достовірністю 0,98 описуються рівнянням y = 1,42x + 0,905.

Розглянемо тепер другий метод обробки і представлення результатів експерименту у вигляді графіка. Будемо використовувати команду «Додати лінію тренда». Додається вона теж в два кроки. На першому вибирається тип (лінійний), на другому – параметри. На вкладці Параметри нам важливо поставити галочки проти слів: «показувати рівняння» і «помістити величину достовірності». Зразковий вид графіка після додавання лінії тренду представлений на рисунку 10. Виведене рівняння прямої і величини достовірності збігається з розрахованими раніше.

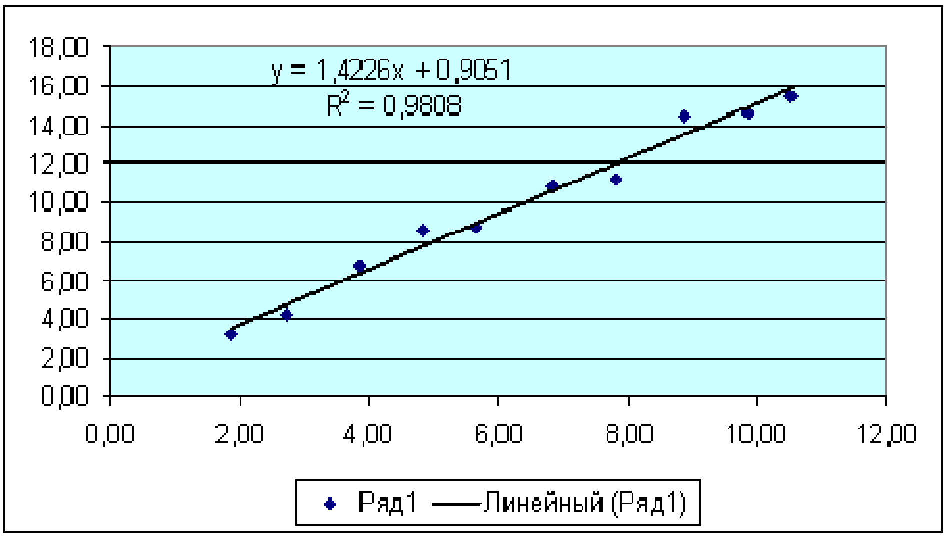


Рисунок 10 – Графік після додавання лінії тренду

Таблиця 22 – Дані для варіантів рішень

№	Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5	Варіант 6	Варіант 7	Варіант 8	Варіант 9	Варіант 10
1	14,85	14,65	14,50	14,30	14,13	13,95	13,77	13,59	13,41	13,23
2	14,80	14,80	14,35	14,20	13,98	13,75	13,53	13,30	13,08	12,85
3	14,84	14,62	14,78	14,65	14,62	14,58	14,54	14,50	14,46	14,42
4	14,81	14,82	14,65	14,52	14,44	14,34	14,23	14,13	14,02	13,92
5	14,63	14,72	14,55	14,33	14,29	14,18	14,08	13,97	13,86	13,76
6	14,81	14,65	14,35	14,44	14,21	14,07	13,93	13,79	13,65	13,51
7	14,80	14,80	14,24	14,33	14,05	13,85	13,65	13,46	13,26	13,06
8	14,85	14,62	14,33	14,85	14,59	14,56	14,53	14,50	14,47	14,45
9	14,84	14,82	14,50	14,30	14,13	13,94	13,74	13,55	13,35	13,16
10	14,80	14,72	14,78	14,85	14,84	14,86	14,88	14,90	14,92	14,95

№	Варіант 11	Варіант 12	Варіант 13	Варіант 14	Варіант 15	Варіант 16	Варіант 17	Варіант 18	Варіант 19	Варіант 20
1	13,05	12,87	12,69	12,51	12,75	14,50	14,20	13,90	13,60	14,50
2	12,60	12,37	12,14	12,50	13,35	14,75	14,50	14,25	14,00	14,60
3	14,39	14,35	14,32	14,28	13,48	14,80	14,40	14,00	13,60	14,89
4	13,80	13,69	13,59	13,48	13,20	14,50	14,30	14,10	13,90	14,62
5	13,62	13,51	13,39	13,28	14,80	14,90	14,70	14,50	14,30	14,68
6	13,38	13,24	13,10	12,96	15,50	15,10	14,60	14,10	13,60	14,68
7	12,85	12,65	12,45	12,75	13,90	14,80	14,85	14,90	14,95	14,85
8	14,46	14,44	14,43	14,41	14,20	14,75	14,90	15,05	15,20	14,92
9	12,95	12,75	12,55	12,35	14,80	14,60	14,60	14,60	14,60	14,51
10	14,98	15,00	15,03	15,05	13,50	14,80	14,50	14,20	13,90	14,68

№	Варіант 21	Варіант 22	Варіант 23	Варіант 24	Варіант 25	Варіант 26	Варіант 27	Варіант 28	Варіант 29	Варіант 30
1	14,10	13,70	13,30	12,90	15,05	14,05	13,05	12,05	14,50	14,75
2	14,50	14,40	14,30	14,20	14,90	14,10	13,30	12,50	14,20	14,48
3	14,60	14,31	14,02	13,73	14,85	14,12	13,39	12,66	14,50	14,65
4	14,20	13,78	13,36	12,94	14,95	14,22	13,49	12,76	14,30	14,45
5	14,50	14,32	14,14	13,96	14,85	14,12	13,39	12,66	14,22	14,65
6	14,50	14,32	14,14	13,96	14,85	14,13	13,41	12,69	14,30	14,68
7	14,40	13,95	13,50	13,05	14,98	14,15	13,32	12,49	14,35	14,75
8	14,21	13,49	12,78	12,06	14,77	14,20	13,63	13,06	14,25	14,62
9	14,22	13,93	13,64	13,35	14,98	14,25	13,52	12,79	14,22	14,64
10	14,60	14,52	14,44	14,36	14,88	14,12	13,36	12,60	14,35	14,40

ЗАНЯТТЯ №5. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ

5.1 Алгебраїчне інтерполювання. Поліном Лагранжа. Постановка завдання інтерполювання. Системи функцій Чебишева

Алгебраїчне інтерполювання. Погрішність інтерполяції.

Нехай $\alpha = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ –набір різних точок (вузлів) на відрізку, в якому задані значення достатньо гладкої функції *f (x)* так, що $f_i = f(x_i), i = 0,1,\ldots,n$. Потрібно побудувати многочлен $L_n(x)$ степеню вище **n** , приймаючої в точках x_i значення f_i , і оцінити похибку наближення функції цим многочленом на відрізку $[a;b]$.

5.2 Кінцеві різниці і різницеві відносини. Інтерполяційний поліном Ньютона

Кінцеві різниці є робочим апаратом при вивченні функцій, заданих таблицею значень в рівновіддалених точках (вузлах), і використовуються в обчисленнях з такими функціями

Кінцевими різницями першого порядку функції f (x) називають величини

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k,\ \ldots.$$

Різниці другого порядку визначаються рівностями

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0,$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y_k = \Delta(\Delta y_k) = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k,$$

Різниці порядку n + 1 визначаються наступним чином:

$$\Delta^{n+1} y_0 = \Delta^n y_1 - \Delta^n y_0,\ \Delta^{n+1} y_1 = \Delta^n y_2 - \Delta^n y_1,\ \ldots. \qquad (2.1)$$

Часто доводиться мати справу з функціями, значення яких відомі для НЕ рівновіддалених значень аргументу Кінцеві різниці при цьому використовувати не можна і в цьому випадку застосовуються так звані різницеві відносини або розділення різниці.

Різницевими відносинами першого порядку називаються величини

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},\ f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},\ \ldots.$$

Геометричні співвідношення першого порядку являють собою кутові коефіцієнти хорд графіка функції y = f (x). Вони мають сенс середніх швидкостей змін функції f (x) на відрізках (x0, x1), (x1, x2), ... За ним складають різницеві відносини другого порядку

$$f\left(x_0, x_1, x_2\right) = \frac{f\left(x_1, x_2\right) - f\left(x_0, x_1\right)}{x_2 - x_0},$$

$$f\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{f\left(x_2, x_3\right) - f\left(x_1, x_2\right)}{x_3 - x_1}, \ldots .$$

Різницеві відносини порядку k + 1, k = 1,2, ..., визначаються за допомогою відносин попереднього порядку k за формулою

$$f\left(x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\right) = \frac{f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\right) - f\left(x_0, x_1, \ldots, x_k\right)}{x_{k+1} - x_0}. \qquad (2.2)$$

Таблиця різницевих відносин функції має вигляд

k	**x_k**	**$f(x_k)$**	**$f(x_k, x_{k+1})$**	**$f(x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$**	**…**
0	x_0	$f(x_0)$	$f(x_0, x_1)$	$f(x_0, x_1, x_2)$	…
1	x_1	$f(x_1)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	…
2	x_2	$f(x_2)$	$f(x_2, x_3)$	…	…
3	x_3	$f(x_3)$	…	…	…
…	…	…	…	…	…

За допомогою різносних відносин будується формула інтерполяційного многочлена Ньютона:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_3) + \ldots$$

$$\ldots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

де $P_n(x_k) = f(x_k),\ k = 0, 1, \ldots, n$ Залишковий член $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ в цьому випадку можна виразити розділену різницю:

$$r_n\left(x\right) = f\left(x, x_0, x_1, \ldots, x_n\right)\left(x - x_0\right)\left(x - x_1\right)\ldots\left(x - x_n\right).$$

Обчислення значення полінома Ньютона Pn (x) в точці можна виробляти за схемою, аналогічною схемою Горнера для обчислення значення многочлена:

$$\begin{aligned} P_n\left(\tilde{x}\right) = \Big(\ldots\Big(\Big(f\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right)\left(\tilde{x} - x_{n-1}\right) + f\left(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\right)\Big)\left(\tilde{x} - x_{n-2}\right) + \\ + f\left(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}\right)\Big)\left(\tilde{x} - x_{n-3}\right) + \ldots + f\left(x_0, x_1\right)\Big)\left(\tilde{x} - x_0\right) + f\left(x_0\right). \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Формула Ньютона зручна для обчислень на ЕОМ за допомогою сучасних математичних пакетів Mathematica, Mathcad і електронних таблиць Microsoft Excel.

Задача 1

Побудувати многочлен найменшого ступеня, що приймає в даних точках наступні значення:

X	–1	0	3	6
Y	–14	–5	22	175

По формулі

$$\Omega_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq 1}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

обчислимо допоміжні многочлени:

$$\Omega_0(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-6)}{(-1-0)(-1-3)(-1-6)} = \frac{x^3 - 9x^2 - 18x}{-28}$$

$$\Omega_1(x) = \frac{(x-(-1))(x-3)(x-6)}{(0-(-1))(0-3)(0-6)} = \frac{x^3 - 8x^2 + 9x + 18}{-18}$$

$$\Omega_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-6)}{(3-(-1))(3-0)(3-6)} = \frac{x^3 - 5x^2 - 6x}{-36}$$

$$\Omega_3(x) = \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)}{(6-(-1))(6-0)(6-3)} = \frac{x^3 - 12x^2 - 3x}{126}$$

Далі за формулою

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Omega_i(x) f_i$$

побудуємо інтерполяційний многочлен Лагранжа

$$L_3(x) = -14\,\frac{x^3 - 9x^2 + 18x}{-28} + (-5)\,\frac{x^3 - 8x^2 + 9x + 18}{18} + 22\,\frac{x^3 - 5x^2 - 6x}{-36} +$$

$$+ 175\,\frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{126} = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$$

Таблиця 23 – Дані для варіантів рішень

№						Рішення
1	X	–1,0	0,0	3,0	6,0	$y = 1x^3 – 2x^2 + 6x – 5$
	Y	–14,0	–5,0	22,0	175,0	
№						Рішення
2	X	–2,0	–1,0	0,0	5,0	$y = –1x^3 + 5x^2 + 31x + 20$
	Y	–14,0	–5,0	20,0	175,0	
№						Рішення
3	X	–2,0	0,0	5,0	8,0	$y = –1x^3 + 5x^2 + 31x + 20$
	Y	–14,0	20,0	175,0	76,0	
№						Рішення
4	X	–2,0	–1,0	4,0	7,0	$y = 1x^3 + 8x^2 + 4x + 2$
	Y	18,0	5,0	210,0	765,0	
№						Рішення
5	X	–2,0	0,0	1,0	4,0	$y = 1x^3 + 2x^2 + 8x + 1$
	Y	–15,0	1,0	12,0	129,0	
№						Рішення
6	X	–2,0	0,0	3,0	7,0	$y = 1x^3 + 6x^2 + 6x + 1$
	Y	5,0	1,0	100,0	680,0	
№						Рішення
7	X	–2,0	0,0	5,0	8,0	$y = x^3 + 4x^2 + 7x + 2$
	Y	–4,0	2,0	262,0	826,0	
№						Рішення
8	X	–1,0	0,0	2,0	5,0	$y = 1x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
	Y	0,0	1,0	21,0	186,0	
№						Рішення
9	X	–1,0	0,0	2,0	5,0	$y = 1x^3 + 3x^2 + 4x + 1$
	Y	–1,0	1,0	29,0	221,0	
№						Рішення
10	X	–2,0	0,0	3,0	6,0	$y = 1x^3 + 2x^2 + 1x + 6$
	Y	4,0	6,0	54,0	300,0	

Задача 2

Функція f(x) задана таблицею.

x	0	2	5	7	12	14
$f(x)$	–5,00	–20,94	–96,88	–155,38	124,02	747,64

Обчислити **f(10)**

По формулі інтерполяційного многочлена Лагранжа

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \Omega_i(x) f_i$$

отримуємо **f(10) = – 125,00**

Таблиця 24 – Дані для варіантів рішень

№		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Рішення**
1	x	0	2	5	7	12	14	10
	y	–5,00	–20,94	–96,88	–155,38	124,02	747,64	–125,00
№								**Рішення**
2	x	0	2	5	7	12	14	10
	Y	–5,00	7,00	100,00	282,00	1507,00	2431,00	855,00
№								**Рішення**
3	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	–2,00	8,80	65,50	137,30	470,80	678,40	308,00
№								**Рішення**
4	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	0,00	8,60	65,00	145,60	567,60	849,80	355,00
№								**Рішення**
5	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	2,00	24,40	44,50	41,90	–55,60	–143,60	2,00
№								**Рішення**
6	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	50,00	–7,60	–70,00	–109,60	–271,60	–386,80	–190,00
№								**Рішення**
7	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	–4,00	–16,00	–41,50	–63,50	–136,00	–172,00	–104,00
№								**Рішення**
8	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	3,00	42,20	135,50	150,70	–325,80	–848,20	–17,00
№								**Рішення**
9	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	5,00	–17,80	–47,50	–29,30	324,20	651,80	115,00
№								**Рішення**
10	X	0	2	5	7	12	14	10
	Y	0,00	19,00	25,00	0,00	–234,00	–421,40	–105,00

Задача 3

Дана Таблиця значень функції f(x) = sh(x)

x	0,40	0,55	0,65	0,80	0,90	1,05
$f(x)$	0,41075	0,57815	0,69675	0,88811	1,02625	1,25386

Знайти приближене значення sh(x) при $x = \tilde{x} = 0{,}596$

Розв'язання: представимо у вигляді таблиці MS Excel. Функція апроксимувати многочленом четвертого ступеня $P_4(x)$. Отримане значення полінома Ньютона в точці $\tilde{x} = 0{,}596$, $P_4(\tilde{x})$ = 0,63192 збігається з табличним значенням гіперболічного синуса $\mathrm{sh}(\tilde{x})$ =0,631917.

	Разностные отношения порядка					$0{,}596 - x$	$P_4(0{,}596)$
	0	1	2	3	4		
0,4	0,41075	1,11600	0,27986	0,19800	0,02962	0,196	0,63192
0,55	0,57815	1,18596	0,35906	0,21281	0,03654	0,046	
0,65	0,69675	1,27572	0,43354	0,23108		–0,054	
0,8	0,88811	1,38411	0,52597			–0,204	
0,9	1,02652	1,51560					
1,05	1,25386						

ЗАНЯТТЯ №6. ЕКСТРАПОЛЮВАННЯ І ПРОГНОЗ ФУНКЦІЙ

6.1 Автоматичне заповнення ряду на основі арифметичної прогресії

Початкове виділення	**Продовження ряду значень**
1, 2	3, 4, 5...
1, 3	5, 7, 9...
2, 3	90, 85

Виділіть не менше двох клітинок, що містять початкові значення для тренда. Перетягніть маркер заповнення в потрібному напрямку, щоб заповнити комірки зростаючими або спадаючими значеннями.

6.2 Автоматичне заповнення ряду на основі геометричної прогресії

Початкове виділення	**Продовження ряду геометричної прогресії**
1, 2	4, 8, 16...
1, 3	9, 27, 81...
2, 3	4,5, 6,75, 10,125...

Виділіть не менше двох клітинок, що містять початкові значення для тренда. Утримуючи праву кнопку миші, перетягнете маркер заповнення в потрібному напрямку для заповнення осередків зростає або убуває значеннями, відпустіть праву кнопку, а потім у контекстному меню виберіть команду Експоненціальне наближення.

6.3 Заповнення ряду вручну на основі лінійного і експоненціального тренда

Для отримання лінійного тренду до початкових значень застосовується метод найменших квадратів ($y = mx + b$).

Для отримання експоненціального тренду до початкових значень застосовується алгоритм розрахунку експоненційної кривої ($y = b * m ^ x$).

Виділіть клітинку, в якій знаходиться перше значення створюваної прогресії.

Команда **Прогресія** видаляє з осередків колишні дані, замінюючи їх новими. Якщо необхідно зберегти колишні дані, скопіюйте їх в іншу рядок або інший стовпець, а потім приступайте до створення прогресії.

На вкладці **Основне** у групі **Правка** натисніть кнопку **Заповнити** та виберіть пункт **Прогресія**.

6.4 Обчислення трендів за допомогою додавання лінії тренду на діаграму

На діаграмі виберіть ряд даних, до якого потрібно додати лінію тренда або лінію змінного середнього.

На вкладці Макет в групі Аналіз натисніть кнопку Лінія тренда і виберіть потрібний тип регресійної лінії тренду або змінного середнього.

Щоб визначити параметри та форматування регресійної лінії тренду або змінного середнього, клацніть лінію тренда правою кнопкою миші і виберіть пункт Формат лінії тренду.

Виберіть параметри лінії тренду, тип ліній і ефекти.

6.5 Прогнозування значень за допомогою функцій

Функція	Опис
ПРЕДСКАЗ	Прогнозування значень
ТЕНДЕНЦИЯ	Прогнозування значень на базі лінійної залежності
РОСТ	Прогнозування значень на базі експоненціальної залежності
ЛИНЕЙН	Побудування лінійної приближення на базі існуючих даних
ЛГРФПРИБЛ	Побудова експоненціального наближення на базі існуючих даних

За допомогою команди Прогресія можна вручну управляти створенням лінійної та експоненційної залежності, а також вводити значення з клавіатури.

Використання функції ПРЕДСКАЗ Функція ПРЕДСКАЗ обчислює або пророкує майбутнє значення за існуючими значеннями. Пророкує значення – це у-значення, Відповідь заданому х–значенням. Відомі значення – це існуючі х– і у–значення; нове значення передвіщається з використанням лінійної регресії. Цією функцією можна скористатися для прогнозування майбутніх продажів, потреб в складських запасах або тенденцій споживання.

Використання функцій ТЕНДЕНЦІЯ і РОСТ Функції ТЕНДЕНЦІЯ і РОСТ дозволяють екстраполювати майбутні у–значення, що продовжують пряму лінію або експоненційну криву, найкращим чином описує існуючі дані. Ці функції можуть повертати у–значення,

Відповідає заданим х-значенням, на базі лінійної або експоненціальної залежності. Використовуючи існуючі х-значення і у-значення, які повертаються цими функціями, можна побудувати пряму або криву, яка описує існуючі дані.

Використання функцій ЛИНЕЙН і ЛГРФПРІБЛ Функції ЛИНЕЙН і ЛГРФПРІБЛ дозволяють обчислити пряму лінію або експоненційну криву для наявних даних. Функції ЛИНЕЙН і ЛГРФПРІБЛ повертають різні дані регресійного аналізу, включаючи нахил і точку перетину лінії з віссю.

6.6 Виконання регресійного аналізу за допомогою надбудови "Пакет аналізу"

Відкрийте вкладку Файл, натисніть кнопку Параметри і виберіть категорію Надбудови.

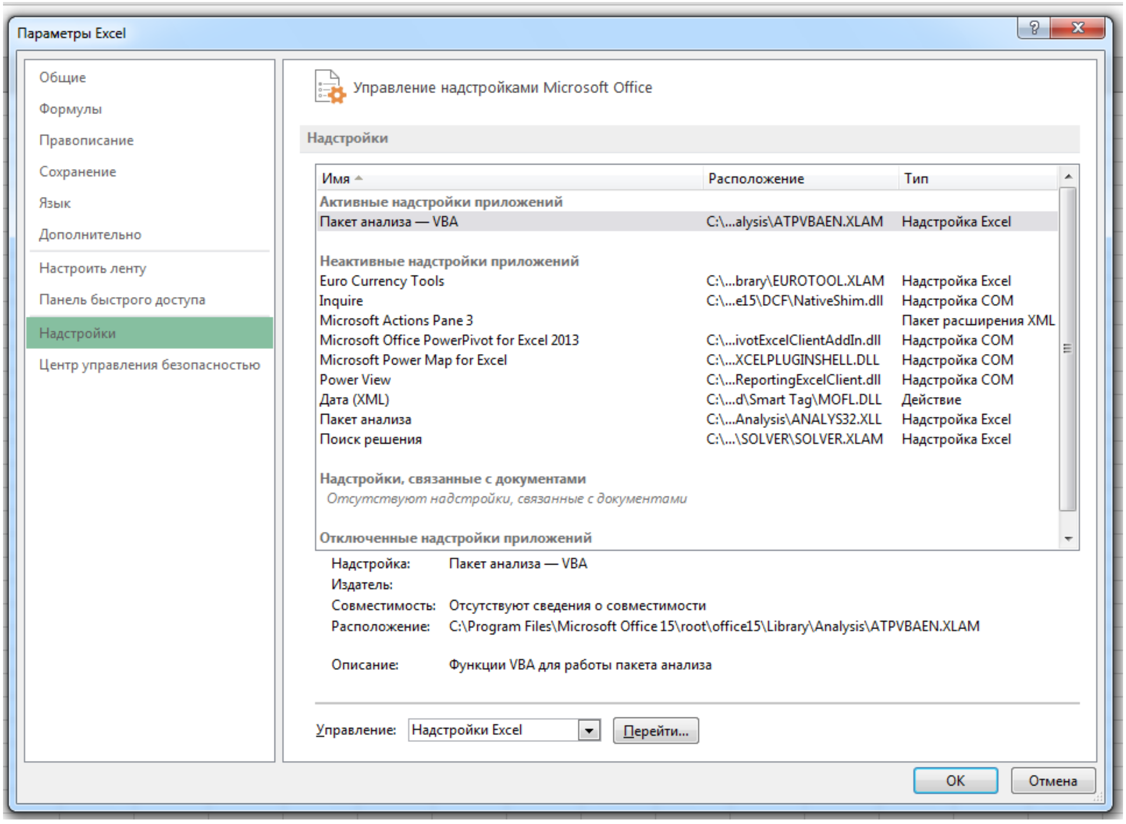


Рисунок 11 – Вікно параметрів

У списку Управління виберіть пункт Надбудови Excel і натисніть кнопку Перейти.

У списку Доступні надбудови виберіть пункт Пакет аналізу та натисніть кнопку ОК.

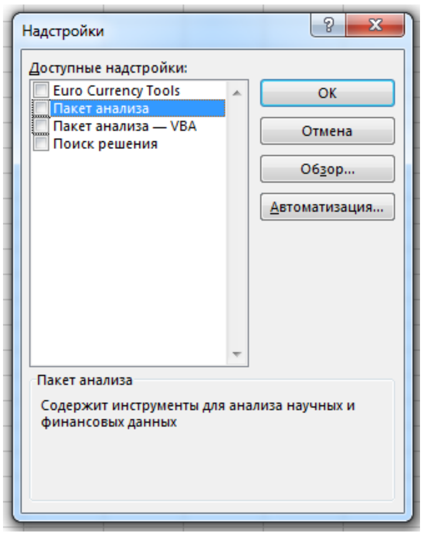


Рисунок 12 – Надстройки

На вкладці Дані у групі Аналіз виберіть команду Аналіз даних.

У діалоговому вікні Аналіз даних виберіть назву потрібного інструменту аналізу і натисніть кнопку ОК.

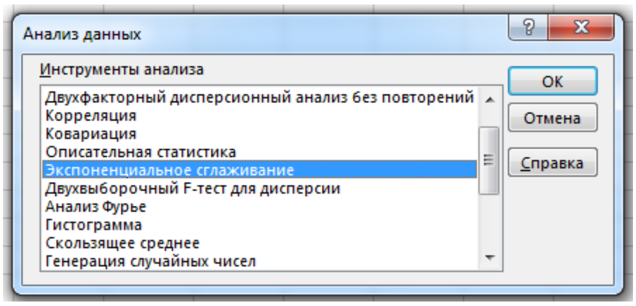


Рисунок 13 – Аналіз даних

Для обраного інструменту вкажіть у діалоговому вікні потрібні параметри аналізу.

6.7 Прогнозування. Метод експоненціального згладжування

- Якщо необхідно прогнозувати очікувані результати, можна використовувати Microsoft Excel для автоматичної генерації майбутніх значень на базі існуючих даних або для автоматичного обчислення екстраполювати значень на основі арифметичної або геометричної прогресії.
- У Excel є кілька інструментів для прогнозування, в основі яких застосовуються різні математичні моделі:
- ковзне середнє (в якості прогнозу приймається середнє значення спостерігається величини в кількох останніх вимірах) може бути обчислено за допомогою функції з ім'ям СРЗНАЧ або надбудови Ковзаюче середнє;
- лінійний прогноз (до отриманими значеннями величини наближається пряма лінія, на підставі якої і розраховується прогноз) виконується за допомогою функції з ім'ям ТЕНДЕНЦІЯ або надбудови Регресія;
- нелінійний прогноз (приймається, що значення величини змінюється нелінійно) може бути отриманий за допомогою функції з ім'ям РОСТ;
- експоненціальне згладжування (приймається усереднене значення спостережень, в яке значення останніх спостережень входять з великою вагою в порівнянні з вагою старих спостережень) виконується за допомогою надбудови Експоненційне згладжування.

Передбачається, що спостереження деякої величини X, проводяться через рівні проміжки часу. Результат спостереження позначимо X (t), де – t номер спостереження. Прогноз P (t + 1) для наступного моменту часу розраховується за формулою:

$$P(t+1) = P(t) + a*(X(t) - P(t))$$

де a – константа згладжування, вибирається зазвичай від 0,2 до 0,3. Великі значення константи згладжування прискорюють відгук прогнозу на стрибок спостережуваного процесу, але можуть призвести до непередбачуваних викидам.

Перший раз після початку спостережень, маючи лише один результат спостережень X (1), коли прогнозу P (1) немає і формулою (1) скористатися ще неможливо, в якості прогнозу P (2) слід взяти X (1).

Формула (1) легко може бути переписана в іншому вигляді: P (t + 1) = (1 – a) * P (t) + a * X (t). Тепер видно, що при збільшенні константи згладжування в прогнозі частка останнього спостереження збільшується, а частка попередніх спостережень убуває.

Уявіть, що Ви керуєте агентством з прокату автомобілів. У міру наближення зими Ви помічаєте збільшення кількості заявок клієнтів на транспорт, постачений багажником для перевезення лиж. Кілька днів по тому після початку проведення дослідження у Вашій місцевості випало дуже багато снігу і, як слід було очікувати, кількість вищезгаданих заявок різко зросло. Отже, використовуючи результати виконаних на сьогоднішній день спостережень (в даному випадку спостереження – це кількість заявок за день) нам потрібно дізнатися, скільки автомобілів, обладнаних багажником для лиж, необхідно підготувати, щоб повністю задовольнити попит у завтрашній день. Скористайтеся Excel для виконання необхідних розрахунків.

1. Запустіть Excel і натисніть на кнопку Зберегти.

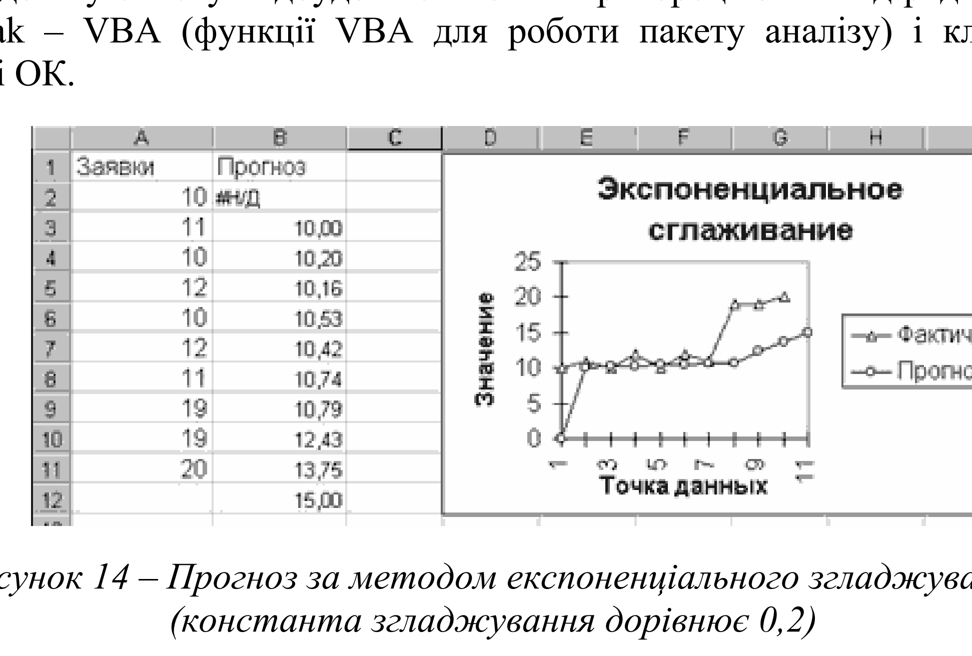
2. За допомогою кнопки Створити папку у вікні Збереження документа створіть на диску d свою робочу папку і збережіть в ній файл Книга1 під ім'ям Прогноз.xls.

3. Встановіть у всій таблиці шрифт Times New Roman розміром 12.

4. Введіть в діапазоні A1: A11 заголовок і дані спостережень.

5. Введіть в комірці B1 заголовок Прогноз.

6. Розкрийте пункт меню Сервіс. Якщо у випадаючому підменю немає команди Аналіз даних, то виконайте команду Сервіс, Надбудови. У вікні Надбудови у списку надбудов встановіть прапорець зліва від рядка Analysis ToolPak – VBA (функції VBA для роботи пакету аналізу) і клацніть на кнопці OK.



	A	B
1	Заявки	Прогноз
2	10	#Н/Д
3	11	10,00
4	10	10,20
5	12	10,16
6	10	10,53
7	12	10,42
8	11	10,74
9	19	10,79
10	19	12,43
11	20	13,75
12		15,00

Рисунок 14 – Прогноз за методом експоненціального згладжування (константа згладжування дорівнює 0,2)

7. Виконайте команду Сервіс, Аналіз даних. З'являється вікно Аналіз даних. Перегорніть список інструментів аналізу і зверніть увагу на те, що їх досить багато.

8. У списку інструментів аналізу виберіть рядок Експоненційне згладжування і клацніть на кнопці ОК. З'явиться вікно Експоненційне згладжування, яке слід заповнити.

9. Встановіть курсор в поле Вхідний інтервал. Виділіть інтервал вхідних даних A1: A12. У полі Вхідний інтервал з'явиться рядок $A$1:$A$12.

10. Проведіть розрахунок при значенні константи згладжування а, рівному 0,2. Для цього введіть у поле Фактор загасання значення, рівне 1 – а, яке в даному випадку дорівнює 0,8.

11. Встановіть прапорець Мітки, що означає, що перша ячейка вхідного інтервалу є заголовком.

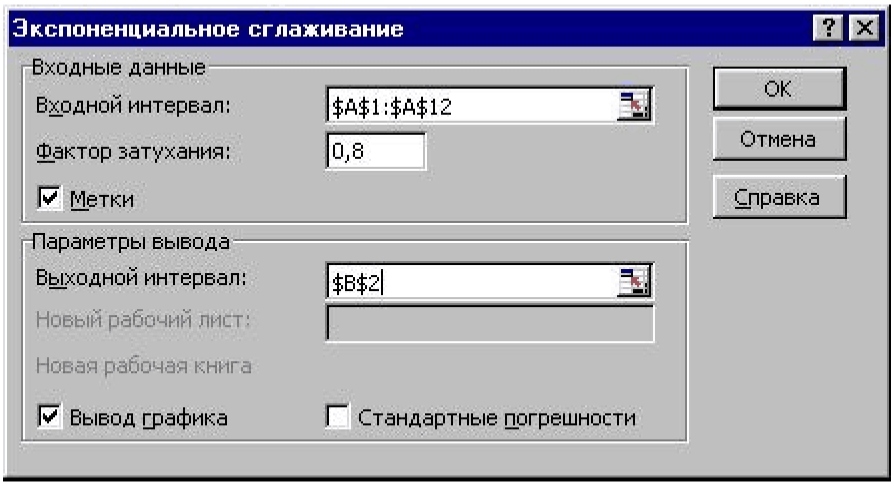


Рисунок 15 – Заповнення вікна експоненційне згладжування

12. Встановіть курсор в поле Вихідний інтервал. Виділіть клітинку В2 – перший осередок вихідного інтервалу. У полі Вихідний інтервал з'явиться рядок $ B $ 2.

13. Встановіть прапорець Висновок графіка і натисніть на кнопку ОК. На робочому аркуші буде виведено прогноз і діаграма, що дозволяє порівняти прогноз з фактичними даними.

14. Встановіть в діапазоні осередків В3: В12 числовий формат з двома розрядами дробової частини.

15. Проаналізуйте отримані результати. В осередку А11 записано кількість заявок, зроблених за десятий день нагляду. В клітинці В11 записаний прогноз на десятий день, отриманий згладжуванням на підставі даних попередніх дев'яти днів спостережень. В осередку В12 записаний прогноз кількості очікуються заявок в наступний день. А скільки їх буде зроблено насправді, стане відомо тільки в наступний день. Запис у клітинці В2 означає недолік даних.

16.Порівнюючи графік фактичних даних з графіком прогнозу, можна зробити висновок про те, що прогноз, отриманий згладжуванням, реагує на стрибок фактичної функції, але повільніше, ніж цього б хотілося. Реакція буде більш швидкою, якщо зменшити значення фактора загасання.

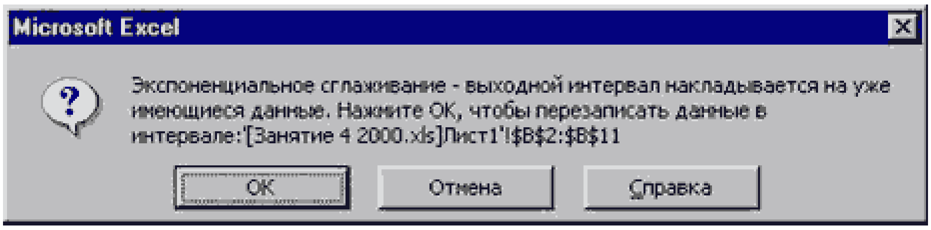
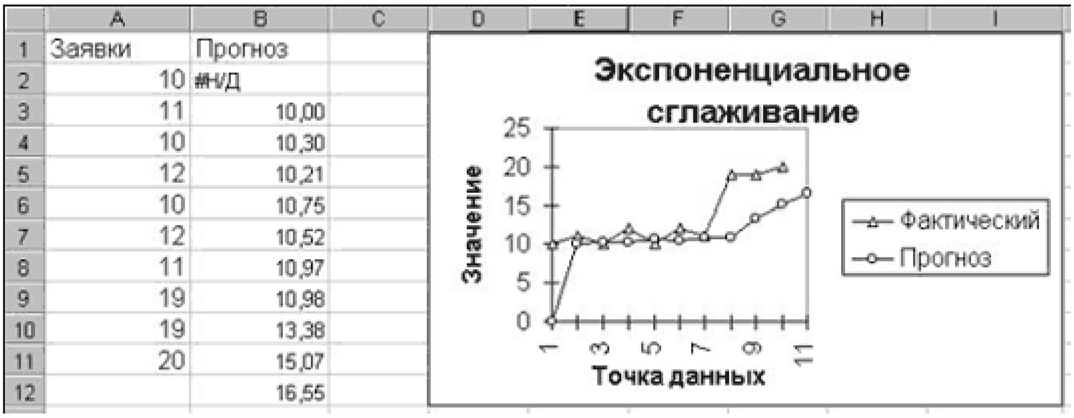


Рисунок 16 – Попередження Excel про запланований перезапис даних

16.Повторіть отримання прогнозу, замінивши значення 0,2 константи згладжування найбільшим рекомендованим значенням 0,3. Вікно, що з'явилося з пропозицією перезаписати дані закрийте клацанням на кнопці ОК.

17. Робочий лист Вашої таблиці повинен відповідати зображенню на рисунку нижче. Можна помітити, що тепер прогноз швидше відстежує стрибок фактичної функції.



	A	B
1	Заявки	Прогноз
2	10	#н/д
3	11	10,00
4	10	10,30
5	12	10,21
6	10	10,75
7	12	10,52
8	11	10,97
9	19	10,98
10	19	13,38
11	20	15,07
12		16,55

Рисунок 17 – Прогноз за методом експоненціального згладжування (константа згладжування дорівнює 0,3)

18.Знову повторіть отримання прогнозу, замінивши значення 0,3 константи згладжування на 0,1. Аналізуючи робочий лист Ви переконаєтеся, що в останньому випадку якість прогнозу помітно зросла, а стійкість прогнозу збереглася.

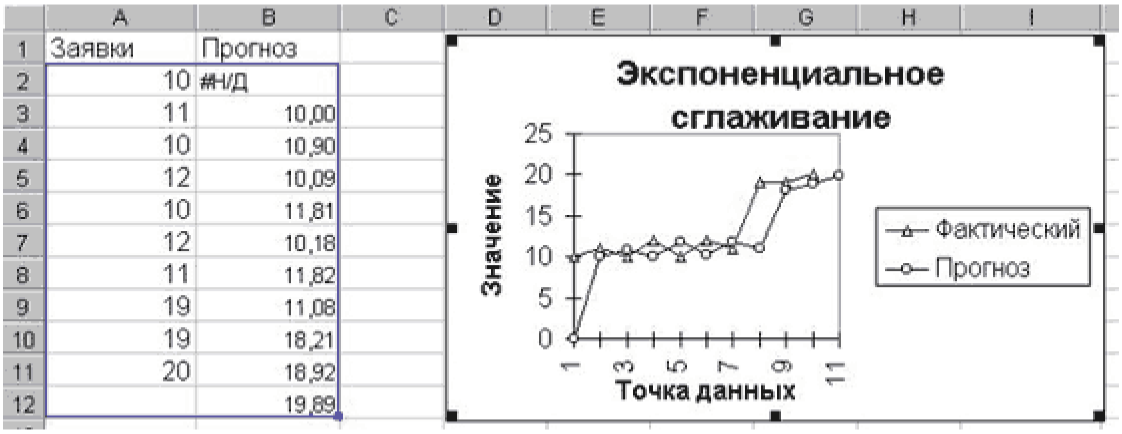


Рисунок 18 – Прогноз за методом експоненціального згладжування (константа згладжування дорівнює 0,9)

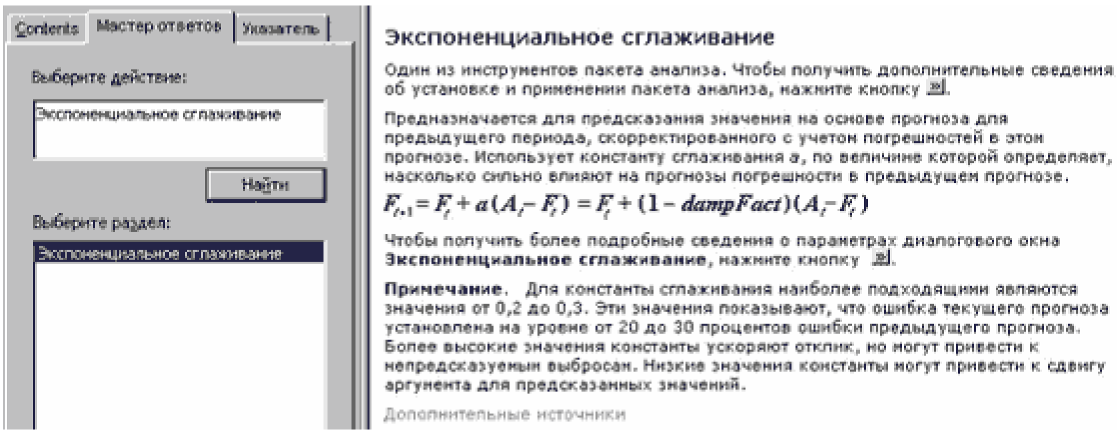


Рисунок 19 – Звернення до довідки

Питання для контролю

1. Які методи застосовують для отримання прогнозу?
2. Яка математична модель прогнозування прийнята в методі змінного середнього?
3. Яка математична модель прогнозування використовується при лінійному прогнозі?
4. Яка ідея лежить в основі методу експоненціального згладжування?
5. Як впливає величина константи згладжування на швидкість відгуку прогнозу на стрибок спостережуваної функції?
6. Як для команди меню Сервіс установлюється команда Аналіз даних?
7. Як знайти опис інструменту аналізу за допомогою довідкової системи Excel?

ЗАНЯТТЯ №7. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ З УРАХУВАННЯМ СЕЗОННОЇ КОМПОНЕНТИ

7.1 Метод прогнозу з використанням змінного середнього

За даними (табл. 26) досліджуємо структуру часового ряду за даними квартального споживання електроенергії за I – III роки. Оцінимо рівень і структуру споживання електроенергії на IV–й рік.

Таблиця 25 – Дані

Період	**Споживання електроенергії, млрд. кВт –г**
I–рік 1 кв.	6,0
I–рік 2 кв	4,4
I–рік 3 кв	5,0
I–рік 4 кв	9,0
II–рік 1 кв.	7,2
II–рік 2 кв	4,8
II–рік 3 кв	6,0
II–рік 4 кв	10,0
III–рік 1 кв.	8,0
III–рік 2 кв	5,6
III–рік 3 кв	6,4
III–рік 4 кв	11,0

Розв'язання. В даній задачі в якості залежної змінної **y** виступає споживання електроенергії, в якості незалежної змінної — час **t** ($t=\overline{1,12}$). Перевіримо наявність сезонності у ряду $\mathbf{y_t}$.

Спочатку зобразимо ряд графічно. Побудуємо діаграму за даними завдання. Тип діаграми – графік з маркерами. Періоди від 1 до 12 використовувати як підписи по осі X.

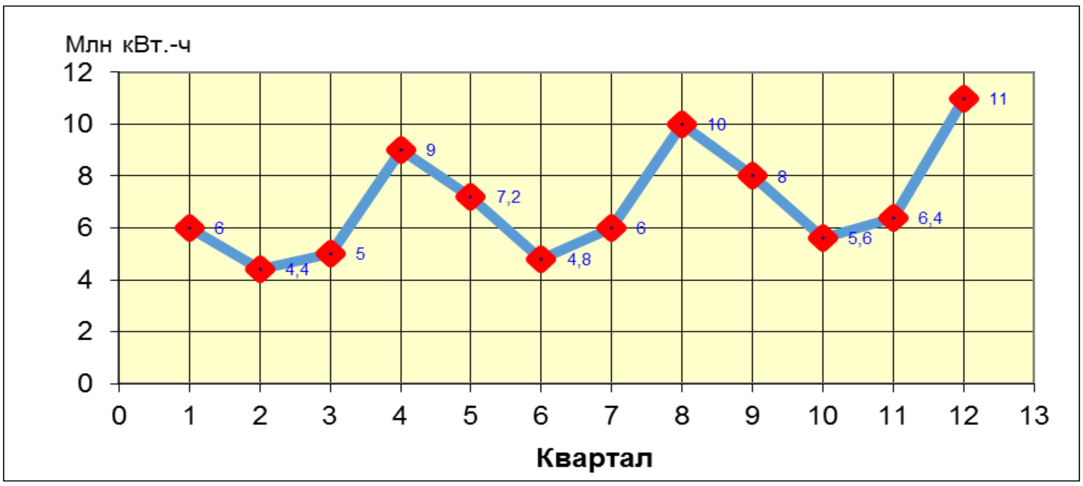


Рисунок 20 – Графік споживання електроенергії за період с 1 кв. I–го року по 4 кв. III–го року

Видно, що кожен 4-й квартал споживання електроенергії кожен рік зростає, тому є підозра на наявність сезонної компоненти в ряді. Візуально також видно, що амплітуда сезонних коливань постійна, що дозволяє припустити адитивну структуру часового ряду $y = T + S + E$.

Для розрахунку сезонних компонент скористаємося методом ковзної середньої. Підсумуємо рівні ряду послідовно за кожні чотири квартали зі зрушенням на один момент часу і визначимо умовні річні обсяги споживання електроенергії. Отримані суми розділимо на довжину періоду (у нашому випадку на 4) і знайдемо ковзні середні, які вже не залежать від сезонності. Щоб привести ці значення в відповідність з фактичними моментами часу, знайдемо середні значення з кожних двох сусідніх ковзних середніх. Оцінку сезонної компоненти знайдемо, віднімаючи від фактичного значення рівня ряду у, центровану ковзну середню (табл. 26).

Таблиця 26 – Початкові дані

Номер періода (t)	**Споживання електроенергії (yt)**	**Всього за чотири квартали**	**Ковзаюча середня за чотири квартали**	**Центрована середня змінна**	**Оцінка сезонної компоненти**
1	2	3	4	5	6
1	6	–	–	–	–
2	4,4	24,4	6,1	–	–
3	5	25,6	6,4	6,25	–1,25
4	9	26	6,5	6,45	2,55
5	7,2	27	6,75	6,625	0,575
6	4,8	28	7	6,875	–2,075
7	6	28,8	7,2	7,1	–1,1
8	10	29,6	7,4	7,3	2,7
9	8	30	7,5	7,45	0,55
10	5,6	31	7,75	7,625	–2,025
11	6,4				
12	11				

На наступному етапі підготуємо другу допоміжну таблицю (табл. 30). Занесемо в неї оцінки сезонних компонент, розподіливши їх по кварталах. За кожен квартал знайдемо середню оцінку сезонної компоненти. Наприклад, для 1–го кв. $\overline{s_1}$ = (0,575 + 0,55 + 0,675) / 3 = 0,6.

Сезонний вплив за період повинен взаємно потухати. У адитивній моделі це виражається в тому, що сума всіх сезонних компонент за період повинна дорівнювати нулю. Розрахуємо редагуючий коефіцієнт за формулою $k=\sum_{i=1}^{n}\overline{S_i}/n$,

де **п** – довжина періоду.

Для нашого прикладу k = (0,6 – 1,958 – 1,275 + 2,708) / 4 = 0,01875.

Скориговані значення сезонної компоненти розраховуємо як різницю між середнім значенням сезонної компоненти і коригувальну коефіцієнтом $s_i = \overline{s_i} - k$, $i = \overline{1,n}$ (табл. 27).

Таблиця 27 – Відредаговані значення сезонної компоненти

Квартал	Оцінка	Середня оцінка сезонної компоненти для і-го кварталу ($\overline{S_i}$)	Скоректована сезонна компонента (S_i)
1	0,575		
	0,55	0,5625	**0,57**
2	–2,075		
	–2,025	–2,05	**–2,04**
3	–1,25		
	–1,1	–1,175	**–1,17**
4	2,55		
	2,7	2,625	**2,63**
Редагуючий коефіцієнт		–0,009375	**–0,01**

Елімінуючи сезонну компоненту з вихідного ряду, тобто розрахуємо y – S. З цією метою заповнимо робочу таблицю (табл. 29):

Таблиця 29 – Робоча таблиця розрахунку сезонної компоненти

Номер періоду (t)	Вихідний ряд *(y)*	Сезонна компонента *(S)*	Перетворений ряд *(y –S)*
1–й	6,0	0,57	5,43
2–й	4,4	–2,04	6,44
3–й	5,0	–1,17	6,17
4–й	9,0	2,63	6,37
5–й	7,2	0,57	6,63
6–й	4,8	–2,04	6,84
7–й	6,0	–1,17	7,17
8–й	10,0	2,63	7,37
9–й	8,0	0,57	7,43
10–й	5,6	–2,04	7,64
11–й	6,4	–1,17	7,57
12–й	11,0	2,63	8,37

Далі в перетвореному ряду біля – S можна виділити лінійний тренд.
y = 0,2121x + 5,5741

Коефіцієнт кореляції для лінійної моделі:: $r = \sqrt{R^2} = 0{,}9237$
І можна виділити поліноміальний тренд:
y = –0,002x^2 + 0,2377x + 5,5143

Коефіцієнт кореляції для поліноміальної моделі: $r = \sqrt{R^2} = 0{,}9245$

Коефіцієнт кореляції для поліноміальної моделі:

Знаючи значення сезонних компонентів

$$S = \begin{cases} 0{,}57\ ;\ t = 1{,}5{,}9 \\ -\ 2{,}04\ ;\ t = 2{,}6{,}10 \\ -\ 1{,}17\ ;\ t = 3{,}7{,}11 \\ 2{,}63\ ;\ t = 4{,}8{,}12 \end{cases}$$

і тренд y = a + bt, можна прогнозувати споживання електроенергії в кожному кварталі IV–го гда з використанням моделі y = a + bt + St:

Обчислюємо У13; У14; у15 і У16 для лінійної та поліноміальної моделей.

Таблиця 30 – Підраховані прогнозні значення споживання електроенергії на наступний рік

Квартал	**Значення X**	**Y (лінійна модель)**	**S**	**ОП (лінійна модель)**	**Y (поліноміальна модель)**	**ОП (поліноміал)**
1	13	8,3314	0,57	8,9014	8,9424	9,5124
2	14	8,5435	–2,04	6,5035	9,2341	7,1941
3	15	8,7556	–1,17	7,5856	9,5298	8,3598
4	16	8,9677	2,63	11,5977	9,8295	12,4595

Рисунок 21 – Графічне представлення прогнозу споживання електроенергії на наступний рік

7.2 Дані для розрахунку прогнозу

За даними про фактичні обсяги споживання електроенергії за три роки скласти прогноз поквартального обсягу споживання на наступний (IV) рік. Оцінити достовірність отриманих результатів.

Таблиця 31 – Показники обсягів споживання електроенергії, млрд. кВт/год

Рік	Квартал	X	Номер варіанта									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1 квартал	1	3,0	2,8	3,8	7,4	5,2	6,1	5,5	2,8	15,4	4,9
1	2 квартал	2	5,0	4,5	6,3	12,3	8,3	7,8	7,0	3,6	25,6	6,3
1	3 квартал	3	8,5	7,8	10,8	20,9	14,5	9,1	8,2	4,2	43,5	7,3
1	4 квартал	4	4,5	4,0	5,7	11,0	7,4	5,8	5,2	2,7	22,9	4,7
2	1 квартал	5	3,8	3,5	4,8	9,3	6,5	5,9	5,3	2,7	19,3	4,7
2	2 квартал	6	6,2	5,7	7,9	15,2	10,6	7,5	6,7	3,4	31,6	6,0
2	3 квартал	7	9,9	8,2	12,6	24,3	15,2	10,5	9,4	4,8	50,5	8,4
2	4 квартал	8	5,4	5,0	6,8	13,2	9,3	6,7	6,0	3,1	27,5	5,4
3	1 квартал	9	4,3	4,0	5,5	10,5	7,4	5,4	4,8	2,5	21,8	4,3
3	2 квартал	10	7,8	7,0	9,9	19,1	13,0	8,2	7,3	3,8	39,7	6,5
3	3 квартал	11	11,2	9,1	14,2	27,5	16,9	12,0	10,8	5,5	57,2	9,7
3	4 квартал	12	6,3	6,5	8,0	15,5	12,1	6,8	6,1	3,1	32,2	5,5

Питання для контролю

1. Які методи застосовують для отримання прогнозу?
2. Яка математична модель прогнозування прийнята в методі змінного середнього?
3. Яка математична модель прогнозування використовується при лінійному прогнозі?
4. Яка ідея лежить в основі методу експоненціального згладжування?
5. Як впливає величина константи згладжування на швидкість відгуку прогнозу на стрибок спостережуваної функції?
6. Як для команди меню Сервіс установлюється команда Аналіз даних?
7. Як знайти опис інструменту аналізу за допомогою довідкової системи?

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Виленкин Н.Я. Комбінаторика .– М., –1968. –323 С.

2. Дюк В.А. Обробка даних на ПК в прикладах. – СПб: Питер, 1 997.

3. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Юнюков І. С., Мешалкін Л. Д. Прикладна статистика: Класифікація та зниження розмірності. – М .: Фінанси і статистика, 1989.

4. Дюк В.А. Обробка даних на ПК в прикладах. – СПб: Питер, 1 997.

5. Гмурман В.Е Теорія ймовірностей і математична статистика. М., «Вища школа», 1977

6. Самарський А.А. Гулін А.В. Чисельні методи 1989р.

7. Костомаров Д.П., Фаворський А.П. Вступні лекції з чисельних методів

8. Крилов В.І. Обчислювальні методи / В.І. Крилов, В.В. Бобков, П.І. Монастирський. Т.2.– М: Наука, 1976

9. Бахвалов Н.С. Чисельні методи / Н.С. Бахвалов. – М .: Наука, 1975

10. Кассандрова О.Н., Лебедєв В.В. Обробка результатів спостережень, М., «Наука», 1970, 194 с.

Навчальне видання

Методичні вказівки
до практичних занять
з курсу

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ В ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЦІ

(для студентів 4 курсу денної та заочної форм навчання за напрямом 6.050701 – Електротехніка та електротехнології та слухачів другої вищої освіти за спеціальністю 7.05070103 – Електротехнічні системи електроспоживання (за видами))

Укладачі: **КАРПАЛЮК** Ігор Тимофійович
КАРЮК Андрій Олександрович

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання: *І. Т. Карпалюк*

План 2014, поз. 197 М

Підп. до друку 15.12.2015
Друк на ризографі.
Зам. №

Формат 60 х 84/16
Ум. друк. арк. 2,1
Тираж 50 пр.

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК 4705 від 28.03.2014 р.